

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ**

NGUYỄN THỊ LINH KHUÊ

**CHẨN ĐOÁN VẾT NÚT TRONG THANH
BĂNG TẦN SỐ RIÊNG**

LUẬN VĂN THẠC SĨ CƠ KỸ THUẬT

Hà Nội – 2016

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ**

NGUYỄN THỊ LINH KHUÊ

**CHẨN ĐOÁN VẾT NÚT TRONG THANH
BĂNG TÀN SỐ RIÊNG**

Ngành: Cơ kỹ thuật

Chuyên ngành: Cơ kỹ thuật

Mã số: 60 52 01 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ CƠ KỸ THUẬT

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: TS. TRẦN THANH HẢI

Hà Nội – 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu kết quả nêu trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Học Viên

Nguyễn Thị Linh Khuê

Lời cảm ơn

Tôi xin chân thành cảm ơn thầy hướng dẫn khoa học đã tận tình hướng dẫn, động viên và giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ sự biết ơn tới sự quan tâm của Khoa Cơ kỹ thuật và Tự động hóa - Trường Đại học Công Nghệ và sự ủng hộ của bạn bè đã giúp đỡ tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình làm luận văn.

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn gia đình và người thân đã động viên giúp đỡ, ủng hộ tôi trong thời gian làm luận văn.

Học Viên

Nguyễn Thị Linh Khuê

MỤC LỤC

Lời cam đoan.....	i
MỤC LỤC.....	iii
Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt.....	iv
Danh mục các hình vẽ.....	vi
MỞ ĐẦU.....	1
1. Tổng quan về bài toán chẩn đoán vết nứt trong thanh.....	2
2. Đặt vấn đề và lựa chọn phương pháp nghiên cứu.....	4
CHƯƠNG 1.....	6
LÝ THUYẾT DAO ĐỘNG CỦA THANH.....	6
1.1. Thiết lập phương trình dao động [16, 18].....	6
1.2. Dao động của thanh không có vết nứt.....	7
1.3. Dao động của thanh có vết nứt.....	9
1.4. Hàm đáp ứng tần số.....	13
Kết luận Chương 1.....	16
CHƯƠNG 2.....	17
CHẨN ĐOÁN VẾT NÚT TRONG THANH.....	17
2.1. Bài toán chẩn đoán [19].....	17
2.2. Chẩn đoán một vết nứt trong thanh.....	19
2.3. Quy trình chẩn đoán nhiều vết nứt trong thanh.....	22
2.3.1. Lời giải bài toán chẩn đoán.....	22
2.3.2. Thuật toán nhận dạng vết nứt.....	23
Kết luận Chương 2.....	24
CHƯƠNG 3.....	25
KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN.....	25
3.1. Ảnh hưởng của vết nứt (độ sâu, vị trí) đến tần số riêng.....	25
3.2. Ảnh hưởng của vết nứt đến hàm đáp ứng tần số.....	36
3.3. Kết quả chẩn đoán.....	39
3.3. Kết luận Chương 3.....	42
KẾT LUẬN CHUNG.....	43
CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN VĂN.....	44
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	45
PHỤ LỤC I.....	47
PHỤ LỤC II.....	48
PHỤ LỤC III.....	51
PHỤ LỤC IV.....	57

Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt

E – mô đun đàn hồi (N/m^2).

ρ – khối lượng riêng (kg/m^3).

F – diện tích tiết diện ngang (m^2).

L – chiều dài thanh (m).

η – hệ số cản (N.s/m).

$c = \sqrt{E/\rho}$ – vận tốc truyền sóng.

ω – tần số dao động riêng của thanh (rad/s).

$\lambda = \omega/c$ – trị riêng.

N – lực dọc trục (N).

$p(x,t)$ – lực phân bố dọc trục (N/m).

$u(x,t)$ – chuyển vị dọc trục.

σ – ứng suất (N/m^2).

ε – biến dạng.

e_1, \dots, e_n – vị trí vết nứt

a_1, \dots, a_n – độ sâu vết nứt tương ứng.

$K_j, j = 1, \dots, n$ – độ cứng lò xo dọc trục (vết nứt được mô tả lò xo)

Danh mục các bảng

Bảng 2.1. Các điểm nút tần số của thanh có một vết nứt.....	22
Bảng 3.1. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt tại vị trí $e_1= 0.5$ lên 5 trị riêng đầu tiên so với kết quả tính bằng phương pháp ma trận truyền (TMM) .	25
Bảng 3.2. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt tại vị trí $e_1= 0.5$ lên 5 trị riêng đầu tiên so với kết quả tính bằng phương pháp ma trận truyền (TMM).	29
Bảng 3.3. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt tại vị trí $e_1= 0.5$ lên 5 trị riêng đầu tiên so với kết quả tính bằng phương pháp ma trận truyền (TMM).	33

Danh mục các hình vẽ

Hình 1.1. Mô hình dao động dọc trục của thanh.....	6
Hình 1.2: Mô hình thanh có vết nứt.	9
Hình 1.3. Thanh ngàm – tự do.	12
Hình 1.4. Thanh ngàm – ngàm.	13
Hình 1.5. Thanh tự do – tự do.	13
Hình 3.1. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên năm tần số đầu tiên cho thanh	25
một đầu ngàm – một đầu tự do (một vết nứt tại 0.1).	25
Hình 3.2. Ảnh hưởng của vị trí vết nứt lên ba tần số đầu tiên của thanh.....	27
một đầu ngàm – một đầu tự do.....	27
Hình 3.3. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ nhất đối với thanh một đầu ngàm – một đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).	27
Hình 3.4. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ hai đối với thanh một đầu ngàm – một đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).....	28
Hình 3.5. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ ba đối với thanh một đầu ngàm – một đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).....	28
Hình 3.6. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên năm tần số đầu tiên cho thanh	29
hai đầu ngàm – ngàm (một vết nứt tại 0.1).	29
Hình 3.7. Ảnh hưởng của vị trí vết nứt lên ba tần số đầu tiên của thanh.....	31
hai đầu ngàm – ngàm.	31
Hình 3.8. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ nhất đối với thanh hai đầu ngàm (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).	31
Hình 3.9. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ hai đối với thanh hai đầu ngàm (vết nứt tại vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).	32
Hình 3.10. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ ba đối với thanh hai đầu ngàm (vết nứt tại vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).	32
Hình 3.11. Ảnh hưởng của vị trí vết nứt lên ba tần số đầu tiên của thanh.....	34
hai đầu tự do – tự do.....	34
Hình 3.12. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ nhất đối với thanh hai đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).	35
Hình 3.13. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ hai đối với thanh hai đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).	35

Hình 3.14. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ ba đối với thanh hai đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).	36
Hình 3.15. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ nhất của thanh một đầu ngàm – một đầu tự do ($a/h= 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 1$, điểm đo $x = 1$)	36
Hình 3.16. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ hai của thanh một đầu ngàm – một đầu tự do ($a/h = 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 1$, điểm đo $x = 1$)	37
Hình 3.17. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ nhất của thanh ngàm – ngàm ($a/h = 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 0.5$, điểm đo $x = 0.5$)	37
Hình 3.18. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ hai của thanh ngàm – ngàm ($a/h = 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 0.5$, điểm đo $x = 0.5$)	38
Hình 3.19. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ hai của thanh ngàm – ngàm ($a/h = 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 0.4$, điểm đo $x = 0.4$)	38
Hình 3.20. Biên độ đáp ứng tần số (FRF) của thanh ngàm hai đầu với một vết nứt giả định tại $e = 0.5$ với (đặt lực tại $x_0 = 0.4$, điểm đo $x = 0.4$)	39
Hình 3.21. Biên độ đáp ứng tần số của thanh hai đầu ngàm với một vết nứt	39
Hình . Kết quả chẩn đoán cho thanh ngàm hai đầu cho thanh có 1 vết nứt	40
với giả thiết số phương trình bằng số ẩn ($\lambda_1=2.917826964$)	40
Hình 3.22. Kết quả chẩn đoán cho thanh ngàm hai đầu có 2 vết nứt giả định tại vị trí $e_1=0.3$, $e_2=0.7$ với giả thiết số phương trình bằng số ẩn	40
Hình 3.23. Kết quả chẩn đoán cho thanh ngàm hai đầu với 1 vết nứt giả định tại vị trí $e = 0.5$. (tần số chẩn đoán tính theo lý thuyết)	41
Hình 3.24. Kết quả chẩn đoán cho thanh ngàm hai đầu có vết nứt tại vị trí	42
$e_1= 0.3$ và $e_2 = 0.7$ với lưới quét 100 điểm chia, sử dụng 5 tần số đầu tiên	42

MỞ ĐẦU

Để đảm bảo sự làm việc an toàn và tránh các tai nạn có thể xảy ra, việc phát hiện kịp thời các vết nứt trong kết cấu là rất cần thiết. Do đó, thời gian gần đây trên các tạp chí về kỹ thuật công trình công bố nhiều công trình nghiên cứu về kết cấu có vết nứt.

Nội dung chính của việc nghiên cứu kết cấu có vết nứt bao gồm hai bài toán: Bài toán phân tích dao động hay còn gọi là bài toán thuận, nhằm nghiên cứu ứng xử của kết cấu khi xuất hiện (đã biết) vết nứt; Bài toán chẩn đoán, thực chất là một bài toán ngược, nhằm mục đích phát hiện vết nứt (vị trí, kích thước và số lượng vết nứt) trong kết cấu dựa trên các số liệu đo đạc về ứng xử của nó.

Nội dung của Bài toán thuận là khảo sát sự ảnh hưởng của các vết nứt lên ứng xử của công trình. Công việc đầu tiên của bài toán thuận là xây dựng mô hình kết cấu có vết nứt. Sau đó là tính toán phân tích các đặc trưng và ứng xử của kết cấu kết cấu phụ thuộc vào vị trí, độ sâu và số lượng vết nứt có thể xuất hiện trong kết cấu. Trong việc tính toán phân tích kết cấu có vết nứt, một vấn đề quan trọng là nghiên cứu ảnh hưởng của vết nứt đến đặc trưng dao động như tần số riêng, dạng dao động riêng của kết cấu (dao động riêng). Những nghiên cứu Bài toán thuận nêu trên là cơ sở quan trọng trong việc giải Bài toán chẩn đoán vết nứt.

Nội dung của Bài toán chẩn đoán vết nứt chính là việc xác định vị trí, kích thước và số lượng của vết nứt dựa trên các số liệu đo đạc về ứng xử của kết cấu. Chẩn đoán vết nứt có thể tiến hành bằng hai cách. Một là xử lý trực tiếp các số liệu thu thập được trong việc khảo sát, đo đạc trên kết cấu thực (bao gồm cả những hình ảnh thu thập được) để phát hiện những thay đổi bất thường trong kết cấu dạng vết nứt dựa trên các hiểu biết về ảnh hưởng của các vết nứt lên ứng xử của kết cấu (kết quả bài toán thuận). Cách tiếp cận này gọi là phương pháp trực tiếp hay chẩn đoán theo triệu chứng (symptom based approach) đã và đang được phát triển theo hướng kết hợp chặt chẽ với công cụ kiểm tra không phá hủy. Cách tiếp cận thứ hai dựa trên mô hình (model based approach) kết cấu có vết nứt giả định và số liệu đo đạc được về ứng xử của kết cấu. Kết quả cho ta một mô hình kết cấu có vết nứt cụ thể tương ứng với số liệu đo đạc thực tế. Cách tiếp cận sau gọi là phương pháp mô hình hay phương pháp nhận dạng hệ thống đang được nghiên cứu hiện nay. Ưu thế của phương pháp mô hình là tận dụng được các công cụ toán học hiện đại, đặc biệt là công nghệ phần mềm để phát hiện không chỉ vị trí vết nứt mà còn dự báo cả kích thước của vết nứt.

Trong việc giải bài toán chẩn đoán vết nứt bằng phương pháp mô hình, người ta có thể sử dụng các thông tin khác nhau về ứng xử của kết cấu làm đầu

vào cho bài toán. Thông tin này bao gồm hai loại chính: các đặc trưng dao động của kết cấu như các tần số và dạng dao động riêng hoặc đáp ứng của kết cấu chịu tải trọng. Các đặc trưng dao động của kết cấu gắn liền với các tính chất cơ học của nó như khối lượng; độ cứng; kích thước hình học và các liên kết. Vì vậy, sử dụng các đặc trưng dao động để chẩn đoán vết nứt có ưu điểm là không phụ thuộc vào tác động bên ngoài, nhưng lại có nhược điểm là mắc sai số trong việc xác định chúng từ số liệu đo. Sử dụng các số liệu đo đạc các đặc trưng dao động hay đáp ứng động của kết cấu để giải bài toán chẩn đoán vết nứt được gọi là Phương pháp dao động trong chẩn đoán vết nứt. Những kết quả chính trong việc phát triển phương pháp dao động trong chẩn đoán hư hỏng kết cấu được tổng quan trong [1-3].

Những khó khăn chủ yếu trong việc chẩn đoán vết nứt bằng phương pháp mô hình cho đến nay vẫn còn đang được giải quyết bao gồm: Một là sự sai khác giữa mô hình kết cấu có vết nứt so với thực tế (sai số mô hình); Hai là số liệu đo đạc thực tế luôn chứa đựng sai số (sai số đo đạc) ngay cả với những thiết bị hiện đại; Ba là khối lượng thông tin thu được từ số liệu đo luôn bị hạn chế so với yêu cầu (thiếu thông tin). Tất cả những khó khăn này đều dẫn đến kết quả chẩn đoán vết nứt không chính xác và không ổn định đối với các số liệu đầu vào.

Phương hướng chung để giải quyết những khó khăn nêu trên là: a) Xây dựng mô hình kết cấu có vết nứt sát với thực tế hơn đồng thời với việc tìm lời giải chính xác cho các mô hình mới được xây dựng (giảm thiểu sai số mô hình) và bổ sung số liệu tính toán để giải quyết vấn đề thiếu thông tin từ số liệu đo; b) Phát triển các phương pháp toán học hiện đại có thể loại trừ được các sai số đo đạc hoặc giải quyết bài toán chẩn đoán vết nứt một cách ổn định khi các số liệu đo đạc có sai số lớn; c) Sử dụng các thiết bị đo đạc hiện đại, các đặc trưng kết cấu chứa nhiều thông tin hơn hay kể cả các phương pháp toán học ngoại suy số liệu để có thêm nguồn thông tin phục vụ chẩn đoán hư hỏng.

1. Tổng quan về bài toán chẩn đoán vết nứt trong thanh

Bài toán cơ bản đầu tiên về vấn đề này được nghiên cứu bởi Adams và các cộng sự [4] cho trường hợp thanh đàn hồi có khuyết tật làm suy giảm độ cứng cục bộ và được mô tả bằng một lò xo dọc trục có độ cứng chưa biết là K_x . Giả sử độ mềm của thanh ở hai bên khuyết tật là β và γ , khi đó ta có phương trình

$$\beta + \gamma + \frac{1}{K_x} = 0.$$

Trong trường hợp thanh không có khuyết tật, tức là không có sự suy giảm độ cứng hay không có sự tăng thêm của độ mềm, $1/K_x = 0$ nghĩa là $K_x = \infty$, thì phương trình trên sẽ là: $\beta_0 + \gamma_0 = 0$.

Vì khuyết tật không phụ thuộc vào kết cấu, nên ta có

$$-\frac{1}{K_x} = (\beta + \gamma)_{\omega=\omega_1} = (\beta + \gamma)_{\omega=\omega_2}.$$

Phương trình này cho phép ta xác định được cả vị trí khuyết tật và sự suy giảm độ cứng do khuyết tật nếu biết hai tần số dao động dọc trục. Trong công trình đầu tiên này, các tác giả chưa mô tả chi tiết bản chất vật lý của khuyết tật cục bộ.

Haisty và Springer [5] đã sử dụng mô hình lò xo dọc trục này để mô tả vết nứt trong một phần tử thanh. Các tác giả này đã đưa ra các công thức tính độ cứng của lò xo thay thế từ độ sâu vết nứt và sử dụng để xây dựng mô hình phần tử hữu hạn của thanh có vết nứt.

Đồng thời, Chondros và Dirmarogonas [6] đã xây dựng hoàn chỉnh mô hình lò xo cho vết nứt trong thanh dựa trên lý thuyết cơ học phá hủy (xem Phụ lục I). Ở đây các tác giả cũng đã đưa ra các công thức tính độ cứng lò xo tương đương được sử dụng để mô tả vết nứt trong dao động dọc trục.

Sử dụng mô hình lò xo cho vết nứt, Narkis [7] đã thiết lập được một phương trình tần số gần đúng ở dạng

$$2 \cos \lambda - \lambda \theta (\sin \lambda - \sin \lambda e) = 0,$$

trong đó θ là hàm của độ sâu vết nứt và e là vị trí vết nứt, $\lambda = \omega L / c$ với c là vận tốc truyền sóng trong thanh $c = \sqrt{E / \rho}$. Tác giả đã sử dụng phương trình này để tìm nghiệm giải tích đối với vị trí vết nứt từ số liệu đo hai tần số riêng trong trường hợp điều kiện biên gối tựa đơn ở dạng

$$e = (2 / \pi) \arccos(1 - R_{12} / 2)$$

với R_{12} là tỷ số giữa hai tần số đo được.

Sau đó, Morassi [8] đã nghiên cứu chi tiết bản chất toán học của phổ tần số riêng của thanh có vết nứt và đưa ra các biện pháp để chẩn đoán vết nứt bằng tần số riêng. Ông đã thiết lập được phương trình gần đúng (xấp xỉ bậc nhất) để xác định vị trí vết nứt ở dạng

$$\frac{\Delta \omega_1}{\Delta \omega_2} = \left(\frac{N_1(e)}{N_{21}(e)} \right)^2; N_k(e) = EF(e)U'_k(e).$$

Ruotolo và Surace [9] đã thiết lập được phương trình tần số của thanh chứa nhiều vết nứt ở dạng định thức và sử dụng để phân tích chi tiết ảnh hưởng vị trí và độ sâu vết nứt đến tần số riêng.

Trong các nghiên cứu của GS. Nguyễn Tiến Khiêm và cộng sự đã xây dựng được biểu thức hiển cho dạng dao động riêng cho thanh chứa nhiều vết nứt. Đồng thời các tác giả cũng đã thiết lập được một phương trình tần số mới để tính toán tần số riêng phụ thuộc vào vết nứt. Tuy nhiên ở các công trình này, các tác giả đã đi sâu nghiên cứu sự thay đổi các điểm nút của dạng riêng (tức các vị trí trong thanh mà dạng riêng triệt tiêu) với mục đích chẩn đoán vết nứt bằng dạng riêng.

Davini [10] cùng cộng sự đã có một nghiên cứu thực nghiệm rất bài bản về dao động dọc trục trong thanh có vết nứt và đưa ra được những khuyến cáo bổ ích để chẩn đoán vết nứt bằng dao động.

Tiếp đó, Dilena [11-12] và cộng sự đã giải bài toán chẩn đoán vết nứt trong thanh với điều kiện biên không lý tưởng bằng tần số riêng và tần số phản cộng hưởng.

Bài toán chẩn đoán vết nứt trong thanh bằng các điểm nút đã được giải quyết bởi Gladwell và Morassi trong [13].

Gần đây, GS. Nguyễn Tiến Khiêm và cộng sự đã giải quyết bài toán chẩn đoán vết nứt trong cọc bằng cách đo đặc hàm đáp ứng tần số [15]. Bằng cách này, tác giả có thể tránh được các sai số đo đặc tần số riêng và các tần số cộng hưởng. Trong công bố này, các tác giả đã thiết lập được biểu thức hiển của phương trình tần số và hàm đáp ứng tần số cho thanh có nhiều vết nứt. Tuy nhiên, các tác giả mới chỉ sử dụng hàm đáp ứng tần số để chẩn đoán vết nứt mà chưa sử dụng phương trình tần số.

Trong luận văn này sử dụng phương trình tần số đã thiết lập cùng với các tần số đo của dao động dọc trục để chẩn đoán vết nứt trong thanh.

2. Đặt vấn đề và lựa chọn phương pháp nghiên cứu

Trong khi bài toán chẩn đoán vết nứt cho dầm đàn hồi đã được giải quyết trong rất nhiều công trình, xem tài liệu tham khảo trong [18], thì vấn đề chẩn đoán vết nứt trong thanh (hay sử dụng dao động dọc trục) còn ít được nghiên cứu như đã trình bày ngắn gọn ở trên. Đặc biệt việc chẩn đoán bằng tần số riêng và phương trình tần số chính xác vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ.

Vì vậy, *bài toán* đặt ra trong luận văn này là:

- (1) Xây dựng mô hình dao động dọc trục của thanh có số lượng vết nứt bất kỳ, trong đó quan trọng nhất là thiết lập phương trình tần số ở dạng tường minh biểu diễn qua các tham số vết nứt;
- (2) Xây dựng một quy trình chẩn đoán vết nứt bằng tần số riêng sử dụng phương pháp điều chỉnh Tikhonov và phương pháp dò vết nứt (crack scanning method);

(3) Tính toán thử nghiệm bằng số một số trường hợp cụ thể.

Mục tiêu của luận văn này là xây dựng quy trình chẩn đoán vết nứt trong kết cấu dựa trên mô hình đã được chính xác hóa cùng với các tần số riêng đo đạc được.

Đối tượng nghiên cứu trong luận văn là kết cấu đơn giản dạng thanh đàn hồi vì hai lý do sau đây. Một là, trong thực tế kỹ thuật người ta sử dụng nhiều các cấu kiện dạng thanh (bar) chỉ chịu kéo nén dọc trục như cọc (pile) hay các bộ phận của dàn (truss). Hai là, dạng kết cấu này cho phép ta áp dụng nhiều phương pháp giải tích có độ chính xác cao.

Phương pháp nghiên cứu ở đây chủ yếu là phương pháp giải tích, sự kết hợp của các phương pháp đã biết như phương pháp mô hình (model-based) và một phương pháp được GS. Nguyễn Tiến Khiêm đề xuất trong các công bố [17-18] được gọi là Phương pháp dò tìm vết nứt (Crack Scanning Method). Đồng thời để giải các bài toán chẩn đoán trong trường hợp thiếu số liệu đo và/hoặc sai số trong số liệu đo, đã áp dụng phương pháp điều chỉnh Tikhonov.

Nội dung của luận án bao gồm các phần sau:

Đặt vấn đề nghiên cứu: trình bày tổng quan về bài toán chẩn đoán hư hỏng kết cấu nói chung, các vết nứt nói riêng và các phương pháp chẩn đoán vết nứt. Ở đây tập trung giới thiệu những kết quả chính về phương pháp dao động ứng dụng trong chẩn đoán hư hỏng kết cấu.

Chương 1 trình bày cơ sở lý thuyết dao động dọc trục của thanh có vết nứt, thiết lập phương trình tần số cho dao động dọc trục của thanh có nhiều vết nứt với điều kiện biên tổng quát.

Chương 2 trình bày nội dung bài toán chẩn đoán vết nứt trong thanh bằng tần số riêng; phương pháp dò tìm vết nứt và đưa ra một quy trình chẩn đoán vết nứt bằng tần số riêng.

Chương 3 trình bày các kết quả tính toán bằng số và thảo luận.

Kết luận chung nêu những kết quả chính đã nhận được trong luận văn và những vấn đề cần phải tiếp tục nghiên cứu.

Tài liệu tham khảo bao gồm 20 tài liệu về vấn đề nghiên cứu, trong đó có 02 công bố mà tác giả luận văn là đồng tác giả.

Phụ lục 1 nêu các công thức khác nhau để tính độ cứng lò xo tương đương sử dụng để mô tả vết nứt;

Phụ lục 2 trình bày ứng dụng khai triển kỳ dị của một ma trận bất kỳ vào việc giải phương trình đại số với ma trận hệ số không vuông hoặc kỳ dị;

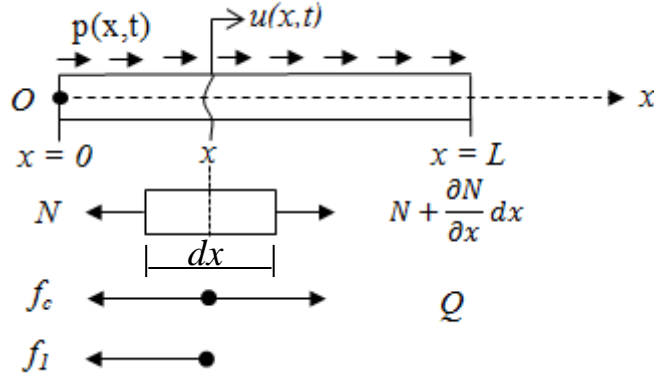
Phụ lục 3 tóm tắt sơ lược về phương pháp điều chỉnh Tikhonov và ứng dụng để giải bài toán chẩn đoán.

CHƯƠNG 1

LÝ THUYẾT DAO ĐỘNG CỦA THANH

1.1. Thiết lập phương trình dao động của thanh[16, 18]

Xét một thanh thẳng có tiết diện đều với các đặc trưng hình học và vật liệu sau đây: E – modul đàn hồi; F – diện tích tiết diện ngang; ρ – mật độ khối; L – chiều dài. Ký hiệu $u(x,t)$ là chuyển vị mặt cắt tại x . Chọn hệ tọa độ là một trục trùng với trục của thanh bắt đầu từ đầu trái như trong Hình 1.1 dưới đây



Hình 1.1. Mô hình dao động dọc trục của thanh.

Các lực tác dụng lên phân tử thanh dx tại mặt cắt x gồm:

- Lực quán tính:

$$f_i = \rho F dx \ddot{u}(x,t)$$

- Các lực kéo ở hai đầu phân tử:

$$N, N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$$

- Lực cản ngoài:

$$f_c = \eta \dot{u}(x,t) dx$$

- Tải trọng phân bố dọc theo thanh:

$$Q = p(x,t) dx$$

Hướng tác dụng của các lực này được xác định trong Hình 1.1 sử dụng nguyên lý D’Alambert ta có thể thiết lập được phương trình

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x} = p(x,t) \quad (1.1)$$

Theo định luật Hook:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x},$$

do vậy lực kéo tổng cộng

$$N = F \sigma = FE \varepsilon = EF \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Khi đó phương trình (1.1) có thể viết ở dạng

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = p(x, t). \quad (1.3)$$

Đây là phương trình dao động của thanh, được giải cùng với các điều kiện biên và điều kiện đầu. Thông thường điều kiện biên thường là cho chuyển vị hoặc lực, ở đây chúng ta có thể viết điều kiện biên tổng quát ở hai đầu thanh như sau:

tại $x=0$:

$$\alpha_0 u(x, t) + \beta_0 u'_x(x, t) = 0 \quad (1.4)$$

và tại $x=1$:

$$\alpha_1 u(x, t) + \beta_1 u'_x(x, t) = 0. \quad (1.5)$$

Một số trường hợp riêng sau:

+ Nếu đầu thanh bị ngàm chặt thì

$$\beta = 0, \alpha = 1; \quad (1.6)$$

+ Nếu đầu thanh tự do:

$$\beta = 1, \alpha = 0; \quad (1.7)$$

+ Nếu đầu thanh có đệm đàn hồi độ cứng K thì

$$\beta = EF, \alpha = \pm K \quad (1.8)$$

hay

$$\beta = EF / K, \alpha = 1. \quad (1.9)$$

Ví dụ: đối với thanh ngàm hai đầu thì điều kiện biên là

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (1.10)$$

và thanh có hai đầu tự do thì điều kiện biên là

$$u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0. \quad (1.11)$$

1.2. Dao động của thanh không có vết nứt

Xét bài toán dao động tự do, khi lực ngoài và lực cản bằng không

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.12)$$

Trong trường hợp các tham số hình học, vật liệu là hằng số ta được

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0; \quad c = \sqrt{E / \rho}. \quad (1.13)$$

Đây là phương trình sóng một chiều với vận tốc truyền sóng bằng c phụ thuộc vào môi trường vật liệu, không phụ thuộc vào hình học của kết cấu.

Đặt :
$$u(x, t) = U(x)e^{i\omega t}, \quad (1.14)$$

phương trình (1.13) sẽ có dạng

$$[-\omega^2 U(x) - c^2 U''_x(x)]e^{i\omega t} = 0. \quad (1.15)$$

Từ đây ta có phương trình để xác định dạng dao động riêng

$$U_x''(x) + \lambda^2 U(x) = 0, \lambda = \omega/c. \quad (1.16)$$

Để dàng nhận thấy nghiệm tổng quát của phương trình (1.16) có dạng

$$U(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \quad (1.17)$$

trong đó các hằng số A, B xác định từ điều kiện biên.

Trước hết ta xét điều kiện biên tổng quát

$$\begin{aligned} \alpha_0 U(0) + \beta_0 U_x'(0) &= 0 \\ \alpha_1 U(1) + \beta_1 U_x'(1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Thay (1.17) vào (1.18) ta được hệ phương trình để xác định hai hằng số A, B

$$\begin{aligned} \alpha_0 A + \lambda \beta_0 B &= 0; \\ (\alpha_1 \cos \lambda - \lambda \beta_1 \sin \lambda) A + (\alpha_1 \sin \lambda + \lambda \beta_1 \cos \lambda) B &= 0. \end{aligned}$$

Để hệ phương trình trên có nghiệm khác không thì điều kiện phải thỏa mãn là

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_0 & \lambda \beta_0 \\ (\alpha_1 \cos \lambda - \lambda \beta_1 \sin \lambda) & (\alpha_1 \sin \lambda + \lambda \beta_1 \cos \lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad (1.19)$$

hay

$$(\alpha_0 \alpha_1 + \lambda^2 \beta_0 \beta_1) \sin \lambda + \lambda (\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0) \cos \lambda = 0. \quad (1.20)$$

Đây chính là phương trình tần số dao động dọc trục của thanh với điều kiện biên tổng quát. Giải phương trình này đối với λ ta được các nghiệm

$$\lambda_k, k = 1, 2, 3, \dots$$

được gọi là các trị riêng của thanh. Ứng với mỗi trị riêng này ta có thể xác định các tần số riêng và dạng dao động riêng

$$\omega_k = \lambda_k \sqrt{E/\rho}, \varphi_k(x) = C_k [A_k \cos \lambda_k x + B_k \sin \lambda_k x]; k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.21)$$

với các hằng số A_k, B_k được tính từ λ_k .

Từ phương trình (1.20) có thể nhận được phương trình tần số cho các trường hợp điều kiện biên cổ điển như sau.

Đối với thanh một đầu ngàm một đầu tự do với các hằng số

$$\alpha_1 = \beta_0 = 0, \alpha_0 = \beta_1 = 1$$

ta được

$$\cos \lambda = 0. \quad (1.22)$$

Tương tự, xét thanh có hai đầu ngàm, khi đó

$$\beta_0 = \beta_1 = 0, \alpha_0 = \alpha_1 = 1$$

và cuối cùng

$$\sin \lambda = 0. \quad (1.23)$$

Trong trường hợp thanh có hai đầu tự do với

$$\beta_0 = \beta_1 = 1, \alpha_0 = \alpha_1 = 0$$

ta được phương trình (1.23).

Kết thúc phần này, ta xét hàm dạng tổng quát (1.17) thỏa mãn điều kiện biên tổng quát bên trái (tức $x=0$)

$$\alpha_0 U(0) + \beta_0 U'_x(0) = 0. \quad (1.24)$$

Thay (1.17) vào (1.24) ta được

$$\alpha_0 A + \beta_0 \lambda B = 0 \quad (1.25)$$

Từ đó rút ra

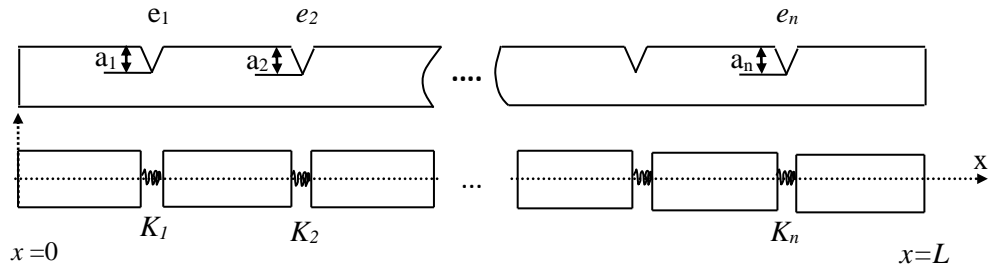
$$A = -\beta_0 \lambda C, \quad B = \alpha_0 C \quad (1.26)$$

Trong đó C là một hằng số tùy ý. Như vậy cuối cùng ta được

$$L_0(x, \lambda) = C(\alpha_0 \sin \lambda x - \lambda \beta_0 \cos \lambda x). \quad (1.27)$$

Nghiệm này sử dụng để nghiên cứu dao động của thanh có vết nứt ở phần sau.

1.3. Dao động của thanh có vết nứt



Hình 1.2: Mô hình thanh có vết nứt.

Xét một thanh đàn hồi có tiết diện không đổi và các hằng số E – mô đun đàn hồi; ρ – khối lượng riêng; F – diện tích tiết diện ngang; L – chiều dài thanh. Giả sử thanh chứa n vết nứt ngang tại các vị trí e_1, \dots, e_n và có độ sâu tương ứng là a_1, \dots, a_n (Hình 1.2). Vết nứt được mô tả bằng lò xo dọc trục có độ cứng là $K_j, j=1, \dots, n$ được tính từ độ sâu vết nứt theo các công thức cho trong Phụ lục 1.

Ta đã thiết lập được phương trình dao động riêng của thanh có dạng

$$U''(x) + \lambda^2 U(x) = 0, \quad x \in (0, L), \quad \lambda = \omega L \sqrt{\rho / E}. \quad (1.28)$$

Tại các vết nứt nghiệm của phương trình (1.28) phải thỏa mãn điều kiện

$$EFU'(e_j + 0) = EFU'(e_j - 0) = EFU'(e_j); \quad (1.29)$$

$$K_j [U(e_j + 0) - U(e_j - 0)] = EFU'(e_j), \quad j = 1, \dots, n$$

hay

$$U'(e_j + 0) = U'(e_j - 0) = U'(e_j)$$

$$U(e_j + 0) = U(e_j - 0) + \gamma_j U'(e_j), \quad \gamma_j = EF / LK_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.30)$$

Ký hiệu nghiệm của phương trình (1.12) giữa hai vết nứt

$$(e_{j-1}, e_j), \quad j = 1, \dots, n+1, \quad e_0 = 0, \quad e_{n+1} = L$$

là: $U_j(x), j = 1, \dots, n+1,$

khi đó các hàm này phải thỏa mãn điều kiện (1.30) được viết lại thành

$$\begin{aligned} U'_{j+1}(e_j + 0) &= U'_j(e_j - 0) = U'_j(e_j); \\ U_{j+1}(e_j + 0) &= U_j(e_j - 0) + \gamma_j U'_j(e_j), j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ta có thể chứng minh được rằng các hàm

$$U_{j+1}(x), x \in (e_j, e_{j+1})$$

được biểu diễn ở dạng

$$U_{j+1}(x) = U_j(x) + \gamma_j U'_j(e_j) \cos \lambda(x - e_j), j = 1, \dots, n, \quad (1.32)$$

trong đó $U_j(x)$ nghiệm phương trình (1.28) trong đoạn (e_{j-1}, e_j) được mở rộng liên tục cho đoạn tiếp theo (e_j, e_{j+1}) .

Thật vậy, do $U_j(x)$ được mở rộng để thỏa mãn phương trình (1.28) trong khoảng (e_j, e_{j+1}) và hàm $\cos \lambda(x - e_j)$ luôn thỏa mãn phương trình (1.28) trong khoảng (e_j, e_{j+1}) , nên biểu thức (1.32) là tổng của hai nghiệm phương trình (1.28) trong khoảng (e_j, e_{j+1}) sẽ là nghiệm của phương trình (1.28) trong khoảng này. Mặt khác sử dụng (1.32) ta thấy

$$\begin{aligned} U_{j+1}(e_j + 0) &= \lim_{x \rightarrow e_j} \{U_j(x) + \gamma_j U'_j(e_j) \cos \lambda(x - e_j)\} = \\ &= U_j(e_j) + \gamma_j U'_j(e_j) \end{aligned} \quad (1.33)$$

và

$$\begin{aligned} U'_{j+1}(e_j + 0) &= \lim_{x \rightarrow e_j} \{U'_j(x) - \lambda \gamma_j U'_j(e_j) \sin \lambda(x - e_j)\} = \\ &= U'_j(e_j). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Tức hàm (1.32) thỏa mãn điều kiện (1.31).

Từ công thức truy hồi (1.32) ta có thể biểu diễn nghiệm tổng quát của phương trình (1.28) ở dạng

$$U(x) = C[L_0(x) + \sum_{j=1}^n \mu_j K(x - e_j)], \quad (1.35)$$

trong đó

$$L_0(x) = \alpha_0 \sin \lambda x - \lambda \beta_0 \cos \lambda x$$

là nghiệm liên tục của phương trình (1.28) thỏa mãn điều kiện biên tại $x=0$, C là hằng số xác định từ điều kiện biên bên phải tại $x=1$ và

$$K(x) = \begin{cases} \cos \lambda x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

Các tham số μ_1, \dots, μ_n được tính công thức truy hồi

$$\mu_j = \gamma_j [L'_0(e_j) - \lambda \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \sin \lambda(e_j - e_k)], j = 1, \dots, n. \quad (1.37)$$

Để chứng minh (1.35) là nghiệm tổng quát của phương trình (1.28) thỏa mãn điều kiện biên bên trái và các điều kiện tương thích (1.31) ta chỉ cần chứng minh biểu thức (1.35) trùng với (1.32) trong khoảng (e_j, e_{j+1}) .

Thật vậy, ta có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học như sau. Xét nghiệm (1.35) trong miền $(0 < x < e_1)$, lúc đó

$$U(x) = C[L_0(x)] = U_1(x). \quad (1.38)$$

Tức (1.35) là nghiệm của phương trình (1.28) thỏa mãn điều kiện biên bên trái. Điều này chứng tỏ điều cần chứng minh đúng cho j , tức là

$$\begin{aligned} U(x) &= C[L_0(x) + \sum_{j=1}^n \mu_j K(x - e_j)] = \\ &= C[L_0(x) + \sum_{j=1}^{j-1} \mu_j \cos \lambda(x - e_j)] = U_j(x) \end{aligned} \quad (1.39)$$

khi $(e_{j-1} < x < e_j)$. Bây giờ ta phải chứng minh điều cần chứng minh đúng với $j+1$. Thật vậy, khi $e_j < x < e_{j+1}$, do tính chất của hàm (1.36) ta có

$$\begin{aligned} U(x) &= C[L_0(x) + \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \cos \lambda(x - e_k) + \mu_j \cos \lambda(x - e_j)] = \\ &= U_j(x) + C\gamma_j [L'_0(e_j) - \lambda \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \sin \lambda(e_j - e_k)] \cos \lambda(x - e_j) =, \\ &= U_j(x) + \gamma_j U'_j(e_j) \cos \lambda(x - e_j) = U_{j+1}(x). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Trong công thức trên đã sử dụng các công thức (1.37) và (1.39) cùng với đạo hàm của hàm số bên vế phải của (1.39):

$$U'_j(x) = C[L'_0(x) - \lambda \sum_{j=1}^{j-1} \mu_j \sin \lambda(x - e_j)]. \quad (1.41)$$

Như vậy, ta đã chứng minh được biểu thức (1.35) cùng với (1.36), (1.37) là nghiệm tổng quát của phương trình (1.28) thỏa mãn điều kiện biên bên trái và các điều kiện tương thích (1.31) tại các vết nứt.

Đưa vào véc tơ

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$$

và

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$$

thì phương trình (1.37) có thể viết lại thành

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\mu} = \mathbf{b}, \quad (1.42)$$

trong đó

$$\mathbf{b} = \{b_j = \gamma_j L'_0(e_j), j = 1, \dots, n\}; \quad (1.43)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, s_{jk} = \gamma_j \lambda \sin \lambda(e_j - e_k). \quad (1.44)$$

Từ đó ta có thể tính được (μ_1, \dots, μ_n) từ $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ bằng công thức

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (1.45)$$

và tính $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ nếu biết (μ_1, \dots, μ_n) như sau

$$\gamma_j = \mu_j / [L'_0(e_j) - \lambda \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \sin \lambda(e_j - e_k)], j = 1, \dots, n. \quad (1.46)$$

Giả sử các điều kiện có dạng tổng quát là

$$\alpha_0 U(0) + \beta_0 U'(0) = 0; \alpha_1 U(1) + \beta_1 U'(1) = 0. \quad (1.47)$$

Khi đó điều kiện biên bên phải $x=1$ sẽ là

$$C\{\alpha_1 L_0(1) + \beta_1 L'_0(1)\} + \sum_{j=1}^n \mu_j [\alpha_1 K(1 - e_j) + \beta_1 K'(1 - e_j)] = 0. \quad (1.48)$$

Do vậy ta nhận được

$$D(\lambda) \equiv \alpha_1 L_0(1) + \beta_1 L'_0(1) + \sum_{j=1}^n \mu_j [\alpha_1 \cos \lambda(1 - e_j) - \lambda \beta_1 \sin \lambda(1 - e_j)] = 0. \quad (1.49)$$

Đây chính là phương trình tần số của thanh chứa nhiều vết nứt, nó được giải cùng với phương trình (1.37) thông qua ẩn λ , sau đó tần số riêng được tính từ nghiệm của phương trình (1.49) λ_k bằng công thức

$$\omega_k = (\lambda_k / L) \sqrt{E / \rho}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.50)$$

Và dạng riêng sẽ được tính bằng công thức

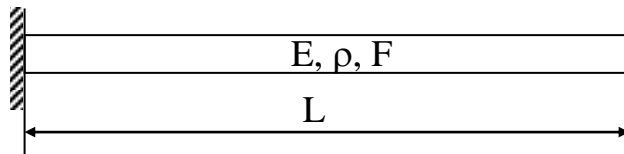
$$u_k(x) = C[L_0(x) + \sum_{j=1}^n \mu_j K(x - e_j)] \Big|_{\lambda=\lambda_k} \quad (1.51)$$

cùng với (1.37) khi $\lambda = \lambda_k$. Lúc ấy hằng số tùy ý C được xác định bằng điều kiện chuẩn hóa, có thể là

$$\max_x u_k(x) = 1. \quad (1.52)$$

Xét một số trường hợp điều kiện biên cổ điển như sau:

+ **Trường hợp 1. Thanh một đầu ngàm và một đầu tự do (Hình 1.3)**



Hình 1.3. Thanh ngàm – tự do.

Nếu thanh bị ngàm tại $x = 0$ thì :

$$L_0(x) = \sin \lambda x$$

và tại đầu tự do $x = 1$ thì :

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1.$$

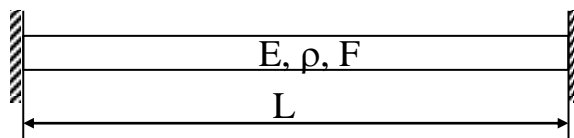
Do đó phương trình tần số (1.49) sẽ là

$$\cos \lambda - \sum_{j=1}^n \mu_j \sin \lambda(1 - e_j) = 0 \quad (1.53a)$$

và phương trình (1.37) có dạng

$$\mu_j = \lambda \gamma_j [\cos \lambda e_j - \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \sin \lambda(e_j - e_k)], j = 1, \dots, n. \quad (1.53b)$$

+ **Trường hợp 2. Thanh ngàm hai đầu (Hình 1.4)**



Hình 1.4. Thanh ngàm – ngàm.

Khi đó ta có:

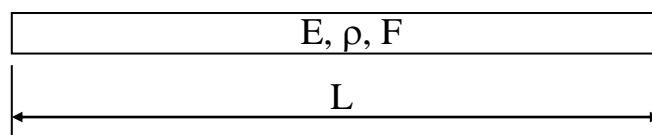
$$L_0(x) = \sin \lambda x, \quad \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0,$$

và phương trình tần số là

$$\sin \lambda + \sum_{j=1}^n \mu_j \cos \lambda(1 - e_j) = 0; \quad (1.54a)$$

$$\mu_j = \lambda \gamma_j [\cos \lambda e_j - \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \sin \lambda(e_j - e_k)], j = 1, \dots, n. \quad (1.54b)$$

+ **Trường hợp 3. Thanh hai đầu tự do (Hình 1.5)**



Hình 1.5. Thanh tự do – tự do.

Trong trường hợp này thì:

$$L_0(x) = \cos \lambda x, \quad \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1,$$

ta được phương trình tần số

$$\sin \lambda + \sum_{j=1}^n \mu_j \sin \lambda(1 - e_j) = 0; \quad (1.55a)$$

$$\mu_j = -\lambda \gamma_j [\sin \lambda e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \sin \lambda(e_j - e_k)], j = 1, \dots, n. \quad (1.56b)$$

Trong trường hợp không có vết nứt hay độ sâu của các vết nứt bằng 0 các phương trình tần số trên cho ta các phương trình đã nhận được ở mục 1.2.

1.4. Hàm đáp ứng tần số

Xét bài toán dao động cưỡng bức của thanh có vết nứt nêu trên được mô tả bằng phương trình

$$\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial u}{\partial t} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q_0(t) \delta(x - x_0), \quad 0 < x < 1, \quad (1.57)$$

trong đó η là hệ số cản và $\delta(x - x_0)$ là hàm delta Dirac. Biến đổi Phurie hai vế phương trình (1.57) ta được

$$\begin{aligned} U''(x) + \lambda^2 U(x) &= -Q_0(\omega) \delta(x - x_0), \\ \lambda^2 &= (\omega/c)^2 - i\omega\eta/EF, \\ Q_0(\omega) &= (1/EF) \int_{-\infty}^{\infty} q_0(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Dễ dàng nhận thấy, nghiệm tổng quát của phương trình trên có dạng

$$U(x, \omega) = U_0(x, \lambda) - Q_0(\omega) \int_0^x h(x-s) \delta(s - x_0) ds, \quad (1.59)$$

trong đó $U_0(x, \lambda)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (1.28) và

$$h(x) = (1/\lambda) \sin \lambda x. \quad (1.60)$$

Tính tích phân bên phải phương trình (1.59) ta được

$$U(x, \omega) = U_0(x, \lambda) - Q_0(\omega) h(x - x_0) \quad (1.61)$$

Sử dụng biểu thức (1.16) của nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất ta có

$$U(x, \omega) = C[L_0(x) + \sum_{j=1}^n \mu_j K(x - e_j)] - Q_0(\omega) h(x - x_0) \quad (1.62)$$

và sau đó áp điều kiện biên bên phải cho nghiệm này ta được

$$\begin{aligned} C\{[\alpha_1 L_0(1) + \beta_1 L_0'(1)] + \sum_{j=1}^n \mu_j [\alpha_1 K(1 - e_j) + \beta_1 K'(1 - e_j)]\} + \\ - Q_0(\omega) [\alpha_1 h(1 - x_0) + \beta_1 h'(1 - x_0)] = 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Từ phương trình cuối (1.63) ta tìm được hằng số tích phân C bằng

$$C = \frac{Q_0(\omega) [\alpha_1 h(1 - x_0) + \beta_1 h'(1 - x_0)]}{[\alpha_1 L_0(1) + \beta_1 L_0'(1)] + \sum_{j=1}^n \mu_j [\alpha_1 K(1 - e_j) + \beta_1 K'(1 - e_j)]}. \quad (1.64)$$

Như vậy cuối cùng ta được

$$U(x, \omega) = Q_0(\omega) \left[\frac{[\alpha_1 h(1 - x_0) + \beta_1 h'(1 - x_0)] [L_0(x) + \sum_{j=1}^n \mu_j K(x - e_j)]}{[\alpha_1 L_0(1) + \beta_1 L_0'(1)] + \sum_{j=1}^n \mu_j [\alpha_1 K(1 - e_j) + \beta_1 K'(1 - e_j)]} - h(x - x_0) \right] \quad (1.65)$$

Theo định nghĩa hàm đáp ứng tần số

$$FRF(x, x_0, \omega) = H(x, x_0, \omega) = U(x, \omega) / Q_0(\omega) \quad (1.66)$$

trong đó x là điểm đo đáp ứng và x_0 là điểm đặt lực có cường độ Q_0 và sử dụng công thức (1.58) ta được biểu thức tổng quát của hàm phổ phản ứng

$$H(x, x_0, \omega) = \left[\frac{[\alpha_1 h(1-x_0) + \beta_1 h'(1-x_0)][L_0(x) + \sum_{j=1}^n \mu_j K(x-e_j)]}{[\alpha_1 L_0(1) + \beta_1 L_0'(1)] + \sum_{j=1}^n \mu_j [\alpha_1 S(1-e_j) + \beta_1 S'(1-e_j)]} - h(x-x_0) \right]. \quad (1.67)$$

Xét một số trường hợp đặc biệt sau đây:

+ **Thanh có đầu trái cố định và đầu phải tự do:** khi đó hàm phổ phản ứng (1.67) có dạng

$$H(x, x_0, \omega) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\cos \lambda(1-x_0)[\sin \lambda x + \sum_{j=1}^n \mu_j K(x-e_j)]}{[\cos \lambda - \sum_{j=1}^n \mu_j \sin \lambda(1-e_j)]} - \sin \lambda(x-x_0) \right]. \quad (1.68)$$

Nếu điểm đo và điểm đặt lực trùng nhau và tại đầu phải tức là ($x = x_0=1$), hàm phổ phản ứng sẽ bằng

$$H(1,1, \omega) = H_{11}(\lambda) = (1/\lambda) \frac{\sum_{j=1}^n \mu_j \cos \lambda(1-e_j) + \sin \lambda}{\sum_{j=1}^n \mu_j \sin \lambda(1-e_j) - \cos \lambda} \quad (1.69)$$

với

$$\mu_j = \lambda \gamma_j [\cos \lambda e_j - \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \sin \lambda(e_j - e_k)], j = 1, \dots, n. \quad (1.70)$$

+ **Trường hợp thanh có hai đầu tự do:**

Ta có

$$H(x, x_0, \omega) = \frac{1}{\lambda} \left[\sin \lambda(x-x_0) + \frac{\cos \lambda(1-x_0)[\cos \lambda x + \sum_{j=1}^n \mu_j K(x-e_j)]}{[\sin \lambda + \sum_{j=1}^n \mu_j \sin \lambda(1-e_j)]} \right] \quad (1.71)$$

và nếu điểm đặt lực và điểm đo ở hai đầu của thanh ta được

$$H(1,0, \omega) = H_{01}(\omega) = (1/\lambda) \frac{1 - \sum_{j=1}^n \mu_j \cos \lambda e_j}{\sin \lambda - \sum_{j=1}^n \mu_j \sin \lambda(1-e_j)} \quad (1.72)$$

với

$$\mu_j = -\lambda \gamma_j [\sin \lambda e_j + \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \sin \lambda(e_j - e_k)], j = 1, \dots, n. \quad (1.73)$$

Kết luận Chương 1

Trong Chương này đã thiết lập được biểu thức giải tích cho phương trình tần số và hàm đáp ứng phổ của thanh có số lượng vết nứt bất kỳ. Phương trình tần số tường minh này không chỉ giúp ta dễ dàng giải bằng các phương pháp thông dụng như phương pháp chia đôi hay phương pháp dây cung để tìm tần số riêng, mà còn là một công cụ rất hữu ích để xây dựng thuật toán chẩn đoán vết nứt bằng cách đo đặc tần số riêng.

Ngoài ra, các biểu thức giải tích của hàm đáp ứng tần số là một công cụ rất quan trọng để đo đặc tần số riêng. Thông thường, trong thử nghiệm dao động người ta chỉ có thể đo được hàm đáp ứng tần số còn tần số riêng, hệ số cản và dạng dao động được tách ra từ số liệu đo của hàm đáp ứng tần số. Vì vậy, các hàm đáp ứng tần số nêu trên có thể sử dụng để xác định tần số riêng từ số liệu đo.

Các phương trình tần số và hàm đáp ứng phổ nêu trên được xây dựng cho trường hợp tổng quát của điều kiện biên, bao gồm cả các trường hợp điều kiện biên cố định và các liên kết biên đàn hồi.

CHƯƠNG 2

CHẨN ĐOÁN VẾT NÚT TRONG THANH

2.1. Bài toán chẩn đoán [20]

Việc xác định vết nứt trong kết cấu hết sức quan trọng, nó giúp ta tránh được các tai nạn, sự cố có thể xảy ra. Công việc chẩn đoán vết nứt bao gồm ba giai đoạn: Một là xác định kết cấu có bị nứt hay không; Hai là vị trí vết nứt có thể xảy ra và Ba là độ sâu hay độ lớn của vết nứt. Cả ba công việc trên có thể làm từng bước nhưng cũng có thể được thực hiện đồng thời. Có một cách tiếp cận cho phép ta thực hiện cả ba công đoạn của việc chẩn đoán vết nứt một cách đồng thời như sau. Giả sử vết nứt với độ sâu chưa biết xuất hiện ở một tập hợp đủ lớn các vị trí khác nhau e_1, \dots, e_n thuộc một lưới chia kết cấu với n đủ lớn để không bỏ sót một khu vực nào đó không được kiểm tra. Nếu sử dụng các phép đo đặc trưng thực tế các đặc trưng của kết cấu, ví dụ các tần số riêng $\omega_1, \dots, \omega_m$ và một mô hình của kết cấu có n vết nứt ta có thể tìm được độ sâu của các vết nứt giả thiết nêu trên là $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n$. Về nguyên tắc, độ sâu vết nứt là không âm, nên các giá trị độ sâu vết nứt tìm được âm hoặc rất bé (xấp xỉ bằng 0) thì ta chấp nhận tại vị trí tương ứng với các độ sâu đó là không có vết nứt. Những vị trí đó bị loại khỏi tập hợp các vết nứt đã giả thiết nêu trên và chúng ta sẽ nhận được một tập vị trí vết nứt nhỏ hơn tập ban đầu. Tiếp tục sử dụng tập vị trí các vết nứt có độ sâu lớn hơn 0 này tại giải lại bài toán để tìm độ sâu của chúng. Sau khi loại bỏ các độ sâu âm và nhỏ đi ta lại được một tập các vị trí vết nứt mới. Công việc này được tiếp tục cho đến khi nào tất cả các vết nứt giả thiết đều có độ sâu lớn hơn không thì dừng lại. Khi đó ta được cả ba điều cần thiết: một là số lượng vết nứt có thể; hai là vị trí các vết nứt có thể và ba là độ sâu tương ứng của chúng. Cách tiếp cận này đã được đề xuất và phát triển bởi GS. Nguyễn Tiến Khiêm và đã được áp dụng trong việc chẩn đoán vết nứt bằng tần số và dạng dao động riêng của dầm đàn hồi gọi là phương pháp dò tìm vết nứt.

Ở đây, phương pháp dò tìm vết nứt được áp dụng để chẩn đoán vết nứt trong thanh bằng tần số riêng.

Bài toán đặt ra như sau: Giả sử ta có thể đo được m tần số riêng $\omega_1, \dots, \omega_m$. Giả thiết thanh có n vết nứt tại các vị trí e_1, \dots, e_n với độ sâu a_1, \dots, a_n và chúng ta có thể thiết lập phương trình tần số sẽ xây dựng trong Chương 2. Các tần số đo phải thỏa mãn phương trình tần số, được viết lại ở dạng

$$f(\omega_k, \mathbf{e}, \mathbf{a}) = 0, k = 1, 2, \dots, m, \quad \mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n), \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \quad (2.1)$$

Sử dụng m phương trình trên để tìm $2n$ ẩn (\mathbf{e}, \mathbf{a}) là nội dung của bài toán chẩn đoán vết nứt bằng tần số riêng.

Rõ ràng đây là một bài toán đánh giá tham số và do thiếu số liệu đo cũng như sai số của số liệu đo, nghiệm của phương trình (3.1) rất có thể không tồn tại hoặc có rất nhiều nghiệm. Đây là tính không chỉnh của bài toán chẵn đoán. Tuy nhiên chúng ta có thể khắc phục được tính không chỉnh này bằng các cách tiếp cận khác nhau, ví dụ như sử dụng phương pháp điều chỉnh Tikhonov. Dưới đây sẽ giải bài toán chẵn đoán vết nứt với số lượng vết nứt giả thiết là một và hai.

Trường hợp tổng quát phương trình tần số (1.49) có thể viết lại ở dạng

$$D(\lambda) \equiv H(1) + \sum_{j=1}^n \mu_j H_1(1 - e_j) = 0, \quad (2.2)$$

$$\mu_j = \lambda \gamma_j [H_0(e_j) - \sum_{k=1}^{j-1} \mu_k \sin \lambda(e_j - e_k)], \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

trong đó: $H_0(x, \lambda) = \alpha_0 \cos \lambda x + \lambda \beta_0 \sin \lambda x, \quad (2.4)$

$$H_1(x, \lambda) = \alpha_1 \cos \lambda x - \lambda \beta_1 \sin \lambda x, \quad (2.5)$$

$$H(x, \lambda) = \alpha \sin \lambda x - \lambda \beta \cos \lambda x, \quad (2.6)$$

với: $\alpha = \alpha_0 \alpha_1 + \lambda^2 \beta_0 \beta_1, \quad \beta = \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1. \quad (2.7)$

Thay (2.3) vào (2.2) khử các tham số μ_j , cuối cùng ta được

$$D(\lambda) \equiv d_0(\lambda) + \lambda \sum_{j=1}^n \gamma_j d_1(e_j) - \lambda^2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} d_2(\lambda, e_j, e_k) \gamma_j \gamma_k + \lambda^3 \sum_{j=3}^n \sum_{k=2}^{j-1} \sum_{r=1}^{k-1} d_3(\lambda, e_j, e_k, e_r) \gamma_j \gamma_k \gamma_r + \dots - (-\lambda)^n d_n(\lambda, e_1, \dots, e_n) \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n = 0, \quad (2.8)$$

trong đó

$$\begin{aligned} d_0(\lambda) &= H(1) \\ d_1(\lambda, e_j) &= H_1(1 - e_j) H_0(e_j) \\ d_2(\lambda, e_j, e_k) &= H_1(1 - e_j) \sin \lambda(e_j - e_k) H_0(e_k) \\ d_3(\lambda, e_j, e_k, e_r) &= H_1(1 - e_j) \sin \lambda(e_j - e_k) \sin \lambda(e_k - e_r) H_0(e_r) \\ &\vdots \\ d_n(\lambda, e_n, \dots, e_1) &= H_1(1 - e_n) \sin \lambda(e_n - e_{n-1}) \sin \lambda(e_{n-1} - e_{n-2}) \dots \sin \lambda(e_2 - e_1) H_0(e_1). \end{aligned} \quad (2.9)$$

+ Trường hợp có một vết nứt phương trình tần số là:

$$D_1(\lambda) \equiv d_0(\lambda) + \lambda \gamma_1 d_1(\lambda, e_1) = 0. \quad (2.10)$$

+ Trường hợp có hai vết nứt phương trình tần số là:

$$D_2(\lambda) \equiv d_0(\lambda) + \lambda \gamma_1 d_1(\lambda, e_1) + \lambda \gamma_2 d_1(\lambda, e_2) - \lambda^2 \gamma_1 \gamma_2 d_2(\lambda, e_2, e_1) = 0. \quad (2.11)$$

+ Trường hợp có ba vết nứt phương trình tần số là:

$$\begin{aligned} D_3(\lambda) &\equiv d_0(\lambda) + \lambda \gamma_1 d_1(\lambda, e_1) + \lambda \gamma_2 d_1(\lambda, e_2) + \lambda \gamma_3 d_1(\lambda, e_3) - \dots \\ &\quad - \lambda^2 \gamma_1 \gamma_2 d_2(\lambda, e_2, e_1) - \lambda^2 \gamma_1 \gamma_3 d_2(\lambda, e_3, e_1) - \lambda^2 \gamma_2 \gamma_3 d_2(\lambda, e_3, e_2) + \dots \\ &\quad + \lambda^3 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 d_3(\lambda, e_3, e_2, e_1) = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nếu các vết nứt có độ lớn $\gamma_j = \chi \bar{\gamma}_j$ với χ là tham số bé, thì các xấp xỉ tiệm cận theo tham số bé của phương trình tần số (2.8) sẽ là
+ Xấp xỉ bậc nhất:

$$D(\lambda) \equiv d_0(\lambda) + \lambda \sum_{j=1}^n \gamma_j d_1(e_j) = 0; \quad (2.13)$$

+ Xấp xỉ bậc hai:

$$D(\lambda) \equiv d_0(\lambda) + \lambda \sum_{j=1}^n \gamma_j d_1(e_j) - \lambda^2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} d_2(\lambda, e_j, e_k) \gamma_j \gamma_k = 0; \quad (2.14)$$

+ Xấp xỉ bậc ba:

$$D(\lambda) \equiv d_0(\lambda) + \lambda \sum_{j=1}^n \gamma_j d_1(e_j) - \lambda^2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} d_2(\lambda, e_j, e_k) \gamma_j \gamma_k + \\ + \lambda^3 \sum_{j=3}^n \sum_{k=2}^{j-1} \sum_{r=1}^{k-1} d_3(\lambda, e_j, e_k, e_r) \gamma_j \gamma_k \gamma_r = 0. \quad (2.15)$$

Phương trình (2.13) đã được thiết lập bởi Narkis [7] cho trường hợp thanh có một vết nứt và Morassi [8], Ruotolo và Surace [9] cho thanh có nhiều vết nứt và các gần đúng bậc cao cho dầm có nhiều vết nứt đã được thiết lập bởi GS. Nguyễn Tiến Khiêm và cộng sự [15-16]. Ở đây các công thức gần đúng nêu trên cho thanh có nhiều vết nứt được thiết lập lần đầu tiên và chúng sẽ được sử dụng để chẩn đoán vết nứt từ tần số riêng dưới đây.

2.2. Chẩn đoán một vết nứt trong thanh

Giả thiết trong thanh có một vết nứt tại vị trí e_1 và độ sâu a_1 . Khi đó phương trình tần số có dạng:

$$\lambda \gamma_1 d_1(\lambda, e_1) + d_0(\lambda) = 0, \quad (2.16)$$

trong đó,

$$d_0(\lambda) = (\alpha_0 \alpha_1 + \lambda^2 \beta_0 \beta_1) \sin \lambda + \lambda (\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0) \cos \lambda; \quad (2.17)$$

$$d_1(\lambda, e_1) = (\alpha_0 \cos \lambda e_1 + \lambda \beta_0 \sin \lambda e_1) [\alpha_1 \cos \lambda (1 - e_1) - \lambda \beta_1 \sin \lambda (1 - e_1)]. \quad (2.18)$$

Phương trình (2.16) đã được Adams và cộng sự [4] thiết lập và sử dụng để xác định vị trí vết nứt bằng hai tần số riêng ω_1, ω_2 như sau:

Từ các tần số riêng đo được ta tính được $\lambda_k = \frac{\omega_k}{c}, k=1,2$. Do đó, ta tính được các giá trị $d_0(\lambda_k), k=1,2$ và xác định được hai hàm số của biến e_1 là: $d_1(\lambda_1, e_1)$ và $d_1(\lambda_2, e_1)$. Khi đó, từ (2.16) ta có phương trình:

$$\frac{d_0(\lambda_1)}{\lambda_1 d_1(\lambda_1, e_1)} = \frac{d_0(\lambda_2)}{\lambda_2 d_1(\lambda_2, e_1)} = -\gamma_1. \quad (2.19)$$

Hay

$$h(e_1) = \lambda_2 d_0(\lambda_1) d_1(\lambda_2, e_1) - \lambda_1 d_0(\lambda_2) d_1(\lambda_1, e_1) = 0. \quad (2.20)$$

Vẽ các hàm số trên trong đoạn $(0, 1)$ ta sẽ tìm được nghiệm của phương trình đối với e_1 , tức là tìm được vị trí vết nứt \hat{e}_1 . Sau đó thay vào (2.19) ta tính được độ lớn vết nứt

$$\hat{\gamma}_1 = EF / K_1 = I_c(a_1 / h_1), \quad (2.21)$$

phương trình cuối cho phép ta xác định được độ sâu vết nứt.

Trong bài toán trên, dễ dàng nhận thấy bài toán không thể giải được khi vết nứt xuất hiện tại vị trí e^* là nghiệm của phương trình

$$d_1(\lambda, e^*) = (\alpha_0 \cos \lambda e^* + \lambda \beta_0 \sin \lambda e^*) [\alpha_1 \cos \lambda (1 - e^*) - \lambda \beta_1 \sin \lambda (1 - e^*)] = 0. \quad (2.22)$$

Ta có thể nhận thấy rằng nếu khi vết nứt xuất hiện tại các vị trí là nghiệm của phương trình (2.22) thì tần số riêng của thanh sẽ không thay đổi do vết nứt, tức $\lambda = \lambda_0$, trong đó λ_0 thỏa mãn phương trình:

$$d_0(\lambda) = 0. \quad (2.23)$$

Vì vậy, nghiệm của phương trình (2.22) được gọi là các điểm nút tần số (vì vết nứt xuất hiện tại đó không làm thay đổi tần số của thanh). Lúc này phương trình (2.22) có thể viết lại thành

$$\alpha_0 \cos \lambda_0 e + \lambda_0 \beta_0 \sin \lambda_0 e = 0 \quad (2.24)$$

hoặc

$$\alpha_1 \cos \lambda_0 (1 - e) - \lambda_0 \beta_1 \sin \lambda_0 (1 - e) = 0, \quad (2.25)$$

được giải cùng với kết hợp với (2.23)

$$d_0(\lambda) = (\alpha_0 \alpha_1 + \lambda^2 \beta_0 \beta_1) \sin \lambda + \lambda (\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0) \cos \lambda; \quad (2.26)$$

Có thể nhận được nghiệm của các phương trình (2.24)-(2.26) trong các trường hợp điều kiện biên cổ điển như sau:

+ **Trường hợp 1. Thanh có một đầu ngàm và một đầu tự do (Hình 1.3)**

$$\text{Do : } \alpha_0 = \beta_1 = 1; \alpha_1 = \beta_0 = 0,$$

ta nhận được

$$\lambda_{0k} = (2k - 1) \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.27)$$

và

$$\sin \lambda_0 (1 - e) = 0. \quad (2.28)$$

Phương trình này cho nghiệm

$$\lambda_0 (1 - e) = r\pi, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.29)$$

Kết hợp (2.27) và (2.29) ta được

$$e = \frac{2(k - r) - 1}{2k - 1}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.30)$$

Từ điều kiện

$$0 \leq e \leq 1 \quad (2.31)$$

Ta tìm được

$$\begin{aligned}
 k=1: e_1 &= 1.0; \\
 k=2: e_1 &= 1/3; e_2 = 1.0; \\
 k=3: e_1 &= 1/5; e_2 = 3/5; e_3 = 1.0 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

+ **Trường hợp 2: thanh có hai đầu ngàm (Hình 1.4)**

Do: $\alpha_0 = \alpha_1 = 1; \beta_0 = \beta_1 = 0$,

ta có

$$\lambda_0 = k\pi, k = 1, 2, 3, \dots \tag{2.33}$$

và

$$\cos \lambda_0 (1 - e) = 0. \tag{2.34}$$

Phương trình này cho nghiệm

$$\lambda_0 (1 - e) = \frac{(2r-1)\pi}{2}, r = 1, 2, 3, \dots \tag{2.35}$$

Kết hợp (2.33) và (2.35) ta được

$$e = \frac{2r-1}{2k}, r = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, 3, \dots \tag{2.36}$$

Từ điều kiện (2.30) ta tìm được

$$\begin{aligned}
 k=1: e_1 &= 1/2. \\
 k=2: e_1 &= 1/4; e_2 = 3/4. \\
 k=3: e_1 &= 1/6; e_2 = 3/6; e_3 = 5/6. \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

+ **Trường hợp 3 : thanh có hai đầu tự do (Hình 1.5)**

Vì $\alpha_0 = \alpha_1 = 0; \beta_0 = \beta_1 = 1$

nên

$$\lambda_0 = k\pi, k = 1, 2, 3, \dots \tag{2.38}$$

và

$$\sin \lambda_0 (1 - e) = 0. \tag{2.39}$$

Phương trình này cho nghiệm

$$\lambda_0 (1 - e) = r\pi, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{2.40}$$

Kết hợp (2.38) và (2.40) ta được

$$e = r/k, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, 3, \dots \tag{2.41}$$

Từ điều kiện (2.30) ta tìm được

$$\begin{aligned}
 k=1: e_1 &= 0; e_2 = 1.0. \\
 k=2: e_1 &= 0; e_2 = 1/2; e_3 = 1.0. \\
 k=3: e_1 &= 0; e_2 = 1/3; e_3 = 2/3; e_4 = 1.0. \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Kết quả tìm các nút tần số cho trong bảng 2.1.

Bảng 2.1. Các điểm nút tần số của thanh có một vết nứt

Điều kiện biên	Dạng dao động		
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
Ngàm – Tự do	1.0	1/3; 1.0	1/5; 3/5; 1.0
Ngàm – Ngàm	1/2	1/4; 3/4	1/6; 1/2; 5/6
Tự do – Tự do	0; 1.0	0; 1/2; 1.0	0; 1/3; 2/3; 1.0

Như vậy, các điểm nút tần số nhận được nêu trên cho phép ta chẩn đoán sơ bộ vết nứt trong thanh bằng tần số riêng đo đạc như sau:

(a) Nếu khi đo đạc ta phát hiện ra tần số thứ nhất không thay đổi nhưng các tần số khác có thay đổi thì ta có thể phỏng đoán là vết nứt xuất hiện ở các điểm nút của tần số thứ nhất;

(b) Tuy nhiên đối với thanh có hai đầu ngàm nếu tần số thứ nhất và thứ ba không thay đổi, nhưng tần số thứ hai có thay đổi thì ta có thể kết luận vết nứt tại vị trí giữa thanh;

(c) Nếu cả ba tần số không thay đổi thì có thể không có vết nứt hoặc vết nứt gần với đầu tự do.

(d) Khi cả ba tần số đều thay đổi thì ta sử dụng phương pháp giải tích như đã trình bày ở trên.

2.3. Quy trình chẩn đoán nhiều vết nứt trong thanh

2.3.1. Lời giải bài toán chẩn đoán

Trong mục này, trình bày phương pháp dò tìm vết nứt trong thanh sử dụng phương trình tần số xấp xỉ (2.1) kết hợp với phương pháp điều chỉnh Tikhonov để giải quyết sai số trong số đo tần số riêng. Giả sử ta đo được m tần số riêng $\omega_1^*, \dots, \omega_m^*$, tức là ta có thể coi các trị riêng đo được là $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$. Thuật toán được trình bày dưới đây đã được Trần Thanh Hải [18] áp dụng để chẩn đoán vết nứt trong dầm đàn hồi bằng cách đo đạc dạng riêng. Còn ở đây là áp dụng cho thanh khi đo được tần số riêng.

Giả thiết thanh có n vết nứt tại các vị trí đã biết e_1, \dots, e_n với các độ lớn chưa biết cần phải tìm là $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Sử dụng phương trình tần số với các trị riêng và vị vết nứt đã biết trên, ta sẽ nhận được hệ phương trình tuyến tính

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.43)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \{-d_0(\lambda_1^*), \dots, -d_0(\lambda_m^*)\}^T; \quad \mathbf{x} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}^T; \\ \mathbf{A} &= [a_{kj}, k=1, \dots, m, j=1, \dots, n]; \quad a_{kj}(\lambda_r^*) = \lambda_k^* d_1(\lambda_k^*, e_j). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Như vậy, ta nhận được hệ m phương trình đại số tuyến tính của n ẩn là các tham số độ lớn (magnitude) vết nứt ứng với các vị trí vết nứt đã giả thiết ở trên. Do số lượng vết nứt phải giả thiết là rất lớn, nhưng số lượng tần số đo được là có hạn, nên ma trận \mathbf{A} thường là không vuông ($m \ll n$) và nhiễu đo không thể loại trừ trong số liệu đo tần số riêng.

Áp dụng phương pháp điều chỉnh Tikhonov như đã trình bày ở Phụ lục 2 cùng với khai triển giá trị kỳ dị (Singular Value Decomposition - SVD) của ma trận \mathbf{A} ta sẽ được biểu thức nghiệm \mathbf{x} của phương trình (2.43) dưới dạng sau

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^R \frac{\sigma_k (\mathbf{u}_k^T \mathbf{b})}{\alpha + \sigma_k^2} \mathbf{v}_k, \quad (2.45)$$

trong đó,

$$\sigma_k, k = 1, \dots, R, R = \text{rank}(\mathbf{A}_r)$$

là các giá trị kỳ dị (singular) và $(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, k = 1, \dots, R)$ là các véc tơ kỳ dị bên trái và bên phải của ma trận \mathbf{A} . Tham số điều chỉnh α được chọn từ phương trình

$$\|\mathbf{Ax}(\alpha) - \mathbf{b}\|^2 = \sum_{k=1}^R \frac{(\mathbf{u}_k^T \mathbf{b})^2}{(1 + \sigma_k^2 / \alpha)^2} + \sum_{k=R+1}^m (\mathbf{u}_k^T \mathbf{b})^2 = \delta^2, \quad (2.46)$$

luôn có nghiệm $\hat{\alpha}$ duy nhất với điều kiện

$$\sum_{k=R+1}^m (\mathbf{u}_k^T \mathbf{b}_r)^2 = \|\mathbf{b}_r^0\|^2 < \delta^2 < \|\mathbf{b}_r\|^2 = \sum_{k=1}^m (\mathbf{u}_k^T \mathbf{b}_r)^2. \quad (2.47)$$

Loại bỏ các thành phần bằng 0 và âm trong véc tơ $\hat{\gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}^T$ ta được một véc tơ $\{\bar{\gamma}_i, i = 1, \dots, n_c\}$ chứa độ lớn của các vết nứt được chẩn đoán là xuất hiện tại các vị trí $\{e_i, i = 1, \dots, n_c\}$. Để tìm độ sâu vết nứt ta phải giải các phương trình

$$f(a_j) = \hat{\gamma}_j, j = 1, 2, \dots, n_c \quad (2.48)$$

với hàm $f(a)$ được chọn là một trong các hàm cho trong Phụ lục 1.

Đây là nội dung và lời giải của bài toán chẩn đoán đa vết nứt từ dạng riêng đo đặc có sử dụng phương pháp điều chỉnh Tikhonov. Rõ ràng lời giải nhận được theo các định lý về phương pháp điều chỉnh Tikhonov là ổn định đối với nhiễu đo đặc của dạng riêng.

2.3.2. Thuật toán nhận dạng vết nứt

Thuật toán nhận dạng vết nứt trong thanh bao gồm các bước sau:

Bước 1: Tạo một lưới quét $\{0 \leq e_1 < e_2 \dots < e_n \leq 1\}$ dọc theo thanh và giả thiết tại các điểm của lưới quét này xuất hiện các vết nứt có độ lớn $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}^T$.

Bước 2: Dựa trên mô hình thanh có vết nứt tại các vị trí (e_1, \dots, e_n) , thiết lập các phương trình (2.43), (2.44) và do đó ta xác định được các véc tơ kỳ dị trái và phải và giá trị kỳ dị của ma trận \mathbf{A} .

Bước 3: Giải phương trình (2.46) với mức độ sai số đo đạc cho trước, ta được hệ số điều chỉnh $\hat{\alpha}$ và nghiệm $\mathbf{x}(\hat{\alpha}) = \{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n\}$ tính theo công thức (2.45).

Bước 4: Loại các giá trị âm và bằng 0 trong véc tơ độ lớn vết nứt tìm được $\{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n\}$ ta sẽ nhận được véc tơ độ lớn của các vết nứt có thể $\{\bar{\gamma}_i, i = 1, \dots, n_c\}$;

Bước 5: Giải phương trình (2.48) để tìm được các độ sâu vết nứt tương ứng là $\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n_c}\}$ và xác định các vị trí vết nứt tương ứng với các độ sâu vết nứt dương $\{\bar{e}_i, i = 1, \dots, n_c\}$.

Bước 6: Như vậy ta đã xác định được vị trí, độ sâu đồng thời với số lượng vết nứt n_c .

Kết luận Chương 2

Trong Chương này, tác giả đã trình bày bài toán chẩn đoán đa vết nứt bằng tần số riêng và thiết lập phương trình tần số cho thanh chứa n vết nứt ở dạng đa thức bậc n của độ lớn vết nứt với các hệ số là hàm của vị trí vết nứt. Phương trình cho phép ta nhận được các xấp xỉ tiệm cận của phương trình tần số đối với độ lớn vết nứt, trong đó xấp xỉ bậc nhất là phương trình đã được một số tác giả thiết lập. Các công thức xấp xỉ bậc cao hơn là các phương trình được thiết lập lần đầu tiên ở luận văn này cho trường hợp dao động dọc trục trong thanh.

Trong trường hợp thanh có một vết nứt thì phương trình tần số trùng với xấp xỉ bậc nhất và đó chính là phương trình tần số chính xác. Ở đây đã nghiên cứu chi tiết phương trình này và đã xây dựng một quy trình chẩn đoán một vết nứt bằng cách đo hai tần số riêng. Ở đây đã tính toán các điểm nứt tần số (là vị trí mà vết nứt xuất hiện tại đó không làm thay đổi tần số) và là cơ sở để chẩn đoán sơ bộ vị trí vết nứt trong thanh.

Đối với trường hợp số lượng vết nứt chưa biết, sử dụng phương pháp dò tìm vết nứt, được trình bày chi tiết trong mục 2.3, đã xây dựng một quy trình chẩn đoán vết nứt bằng tần số riêng cho thanh. Trong lời giải bài toán chẩn đoán nhiều vết nứt này đã sử dụng phương pháp điều chỉnh Tikhonov để giải phương trình đại số phi tuyến với ma trận hệ số không vuông và có thể kỳ dị. Phương trình này được trình bày trong phụ lục II.

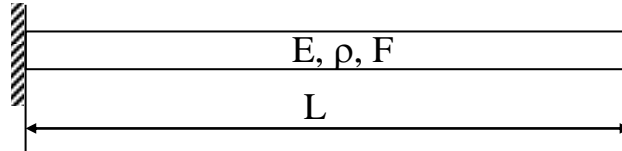
CHƯƠNG 3

KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Ảnh hưởng của vết nứt (độ sâu, vị trí) đến tần số riêng

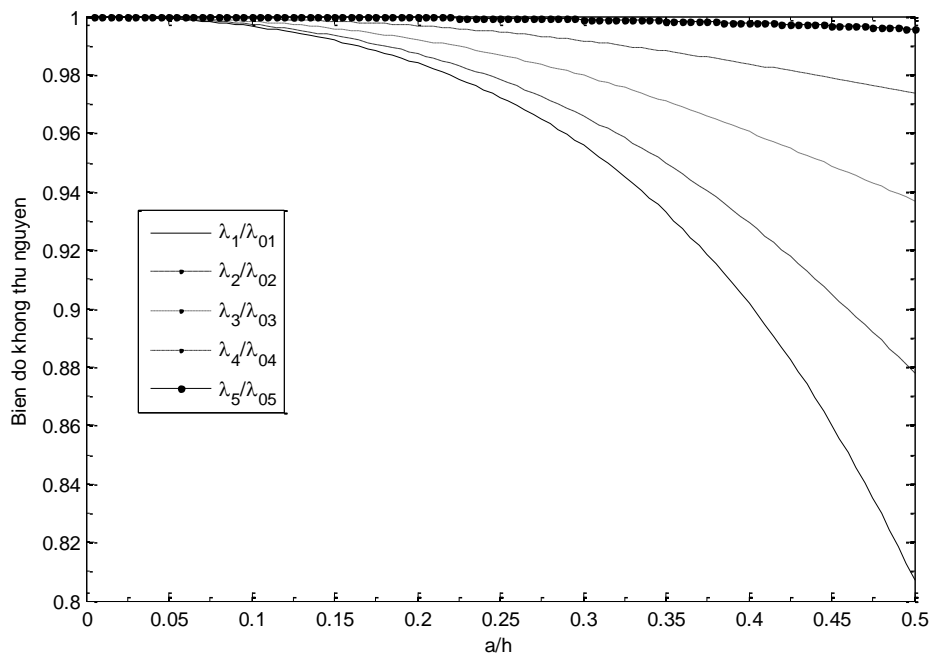
Xét thanh có số liệu sau: mô đun đàn hồi $E = 7.2e^{10} \text{N/m}^2$. Khối lượng riêng $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$. Hệ số Poisson $\nu = 0.35$, chiều rộng của thanh $b = 0.006 \text{m}$, chiều cao mặt cắt ngang của thanh $h = 0.023 \text{m}$ và có chiều dài $L = 0.235 \text{m}$.

+ *Trường hợp 1*: Ngàm – tự do

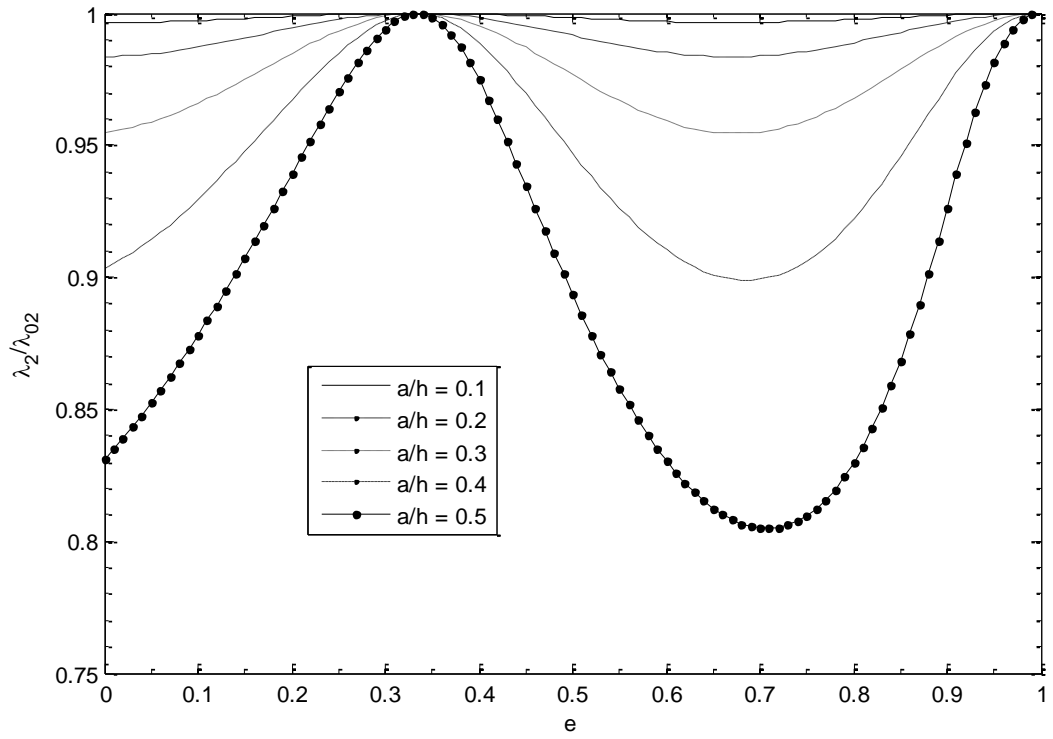
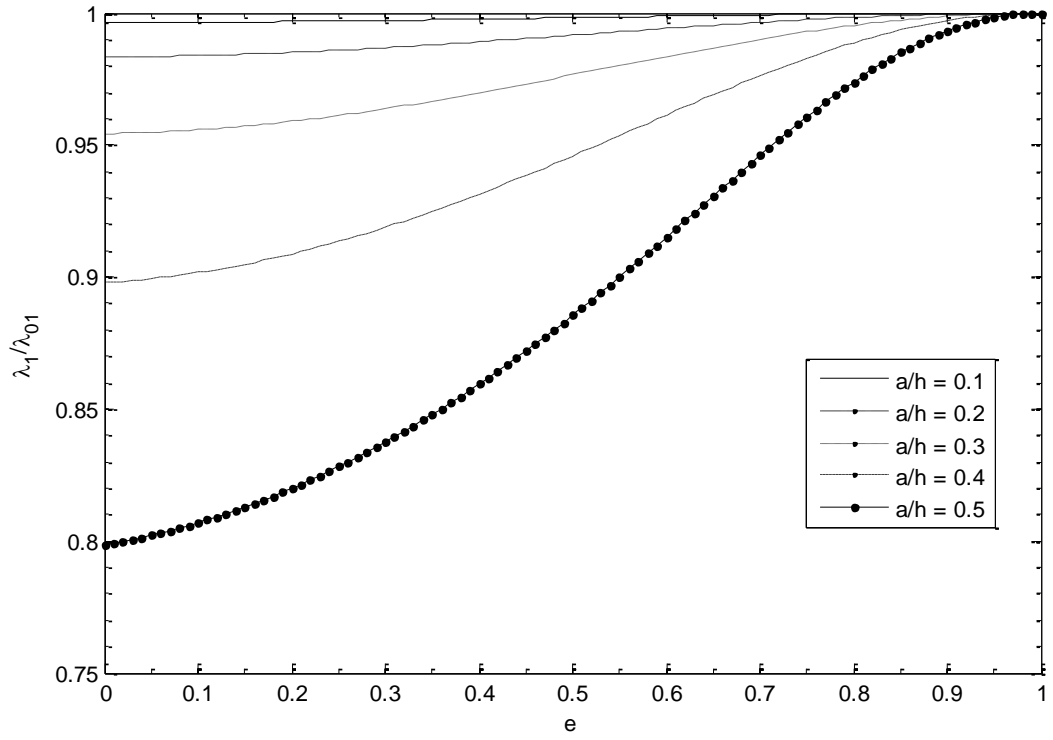


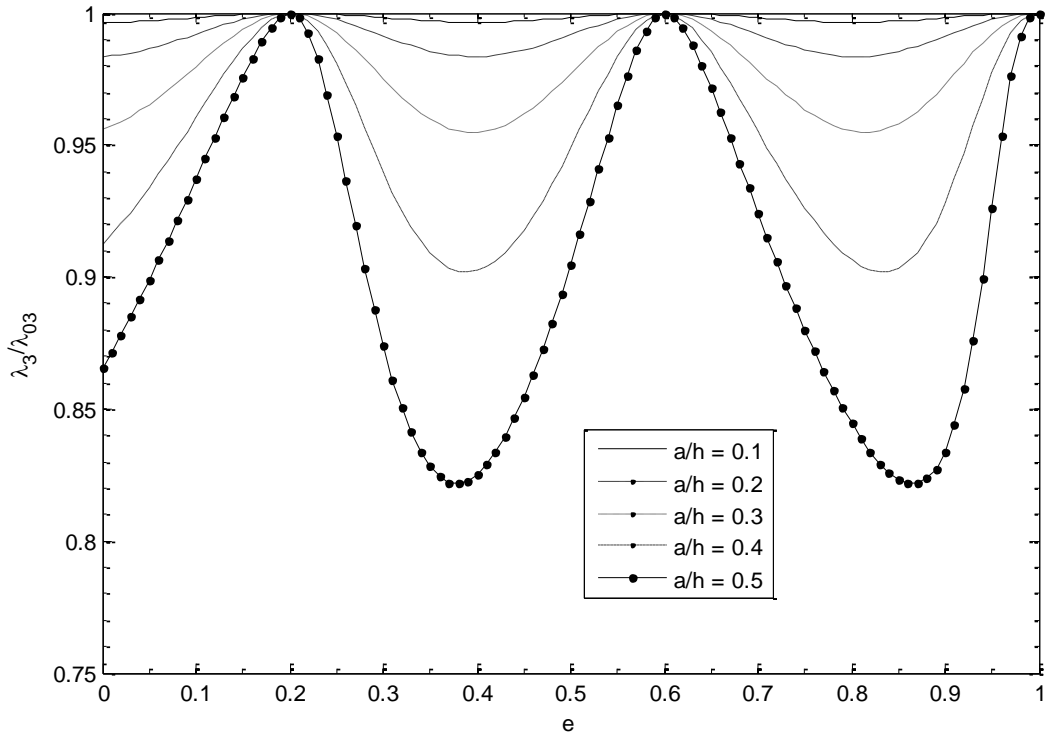
Bảng 3.1. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt tại vị trí $e_1 = 0.5$ lên 5 trị riêng đầu tiên so với kết quả tính bằng phương pháp ma trận truyền (TMM) .

STT	λ							
	TMM [9]				Kết quả tính (Ngàm – Tự do)			
	a/h				a/h			
	0	0.1	0.3	0.5	0	0.1	0.3	0.5
1	1.57080	1.5680	1.53406	1.39107	1.57080	1.5680	1.53406	1.39107
2	4.71239	4.7040	4.60258	4.20968	4.71239	4.7040	4.60258	4.20968
3	7.85398	7.8400	7.67222	7.10586	7.85398	7.8400	7.67222	7.10586
4	10.9956	10.976	10.7437	10.0746	10.9956	10.976	10.7437	10.0746
5	14.1372	14.112	13.8175	13.0954	14.1372	14.112	13.8175	13.0954

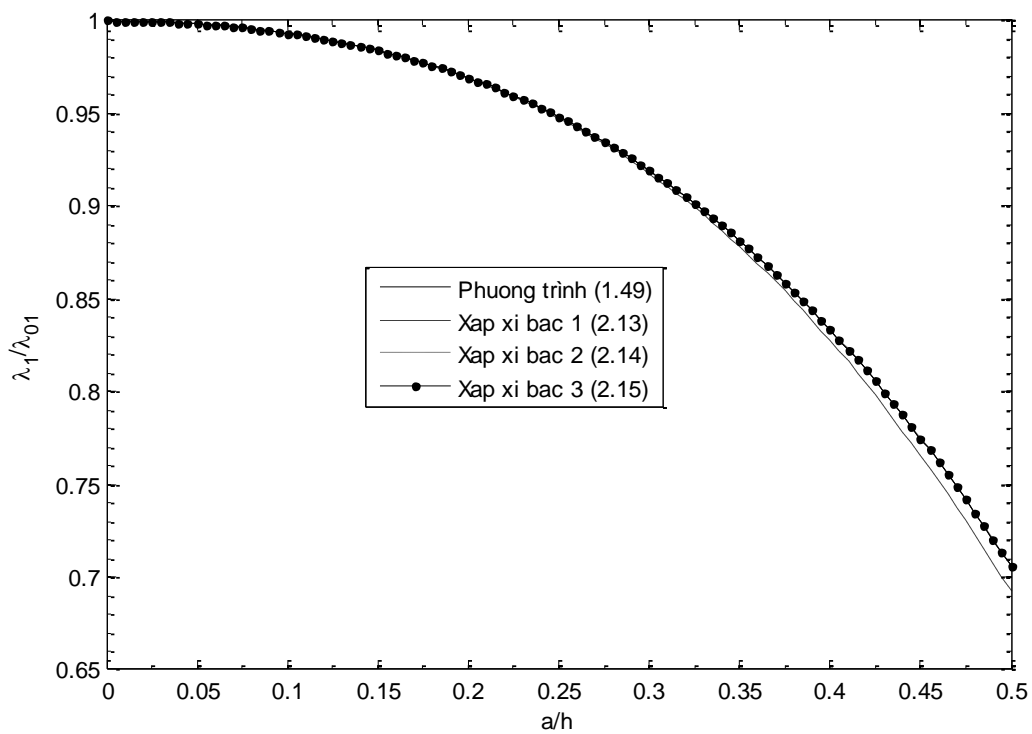


Hình 3.1. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên năm tần số đầu tiên cho thanh một đầu ngàm – một đầu tự do (một vết nứt tại 0.1).

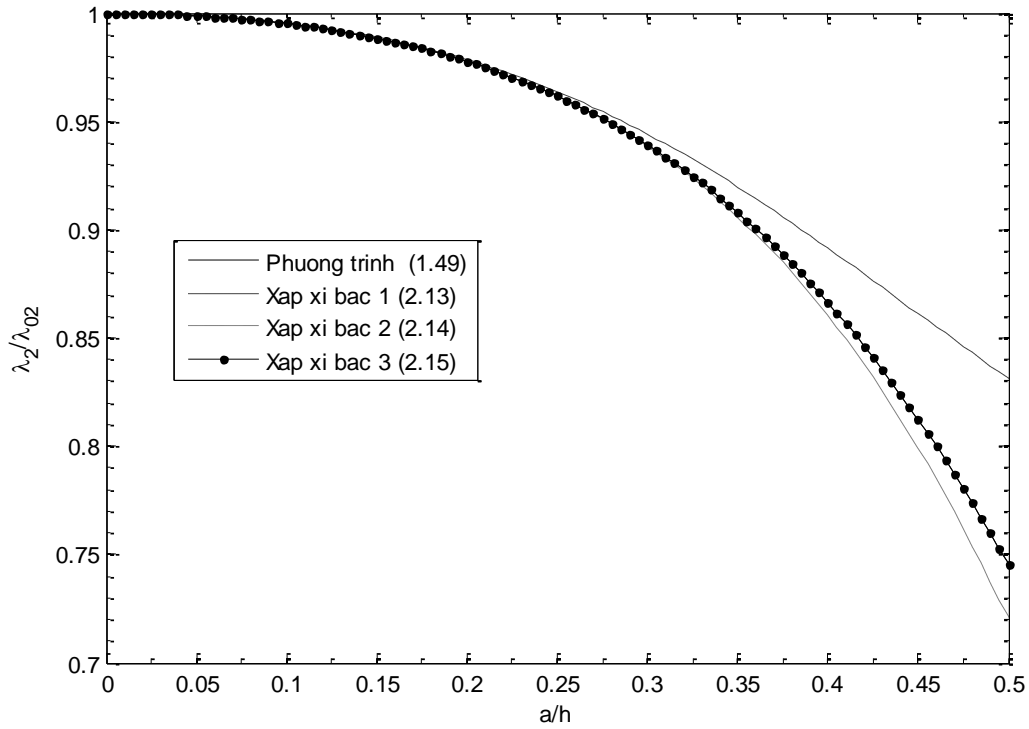




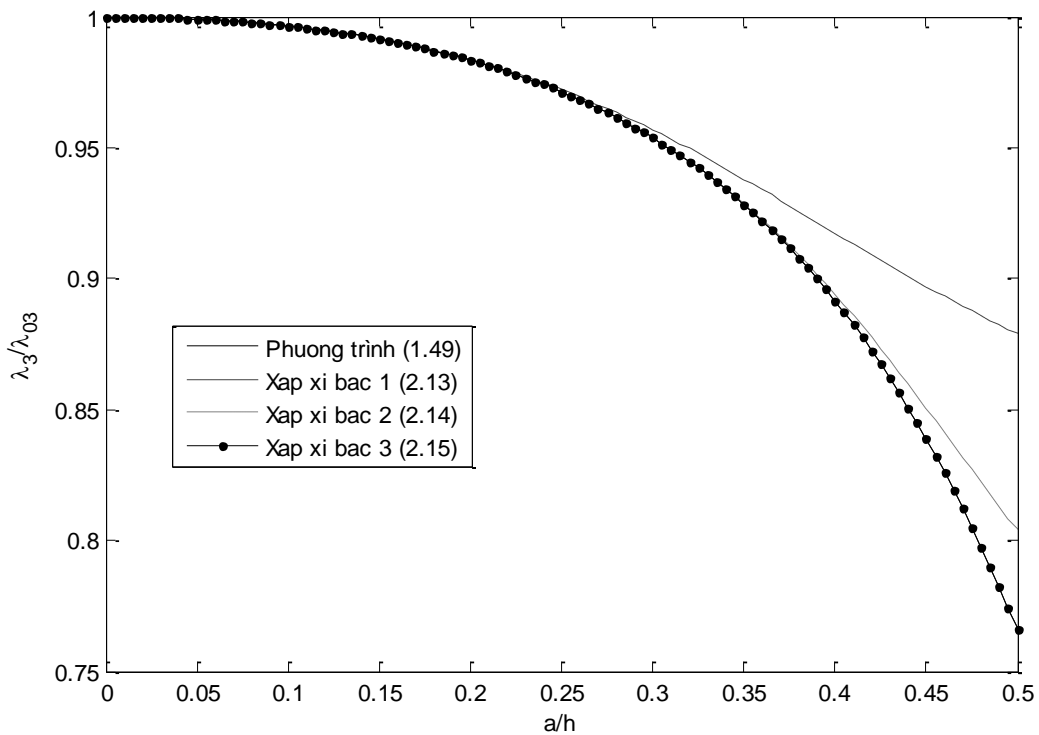
Hình 3.2. Ảnh hưởng của vị trí vết nứt lên ba tần số đầu tiên của thanh một đầu ngàm – một đầu tự do.



Hình 3.3. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ nhất đối với thanh một đầu ngàm – một đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).

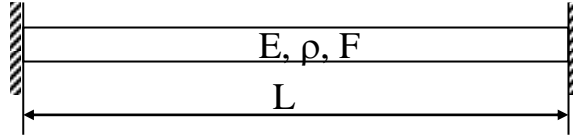


Hình 3.4. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ hai đối với thanh một đầu ngàm – một đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).



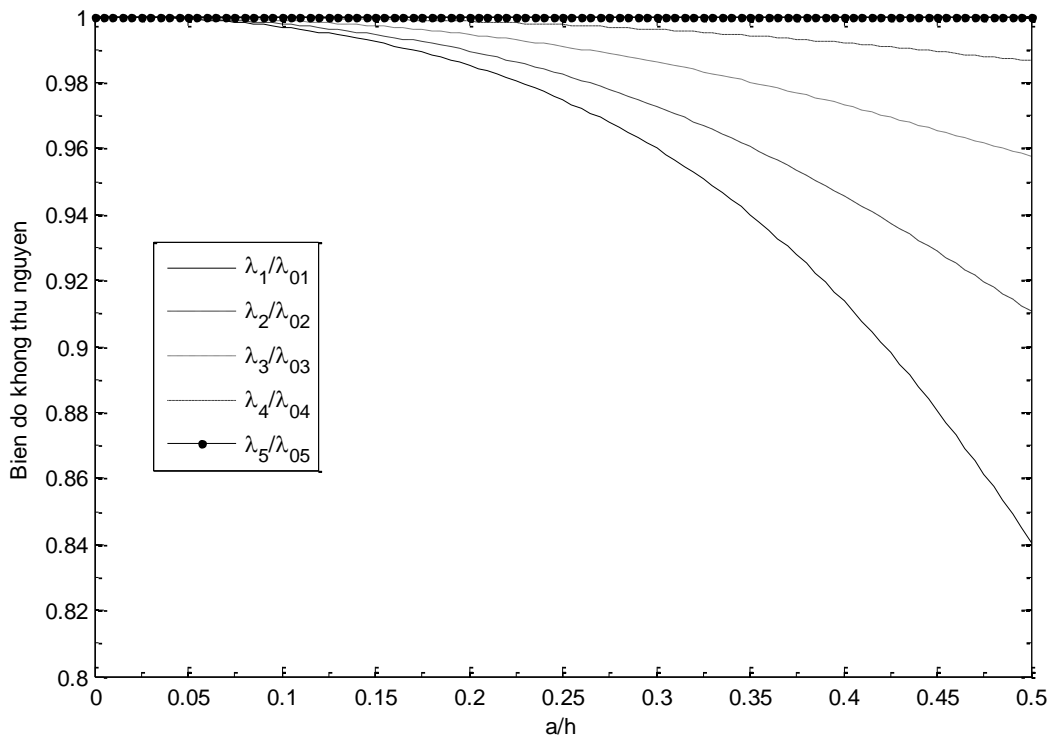
Hình 3.5. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ ba đối với thanh một đầu ngàm – một đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).

+ Trường hợp 2: Ngàm – Ngàm

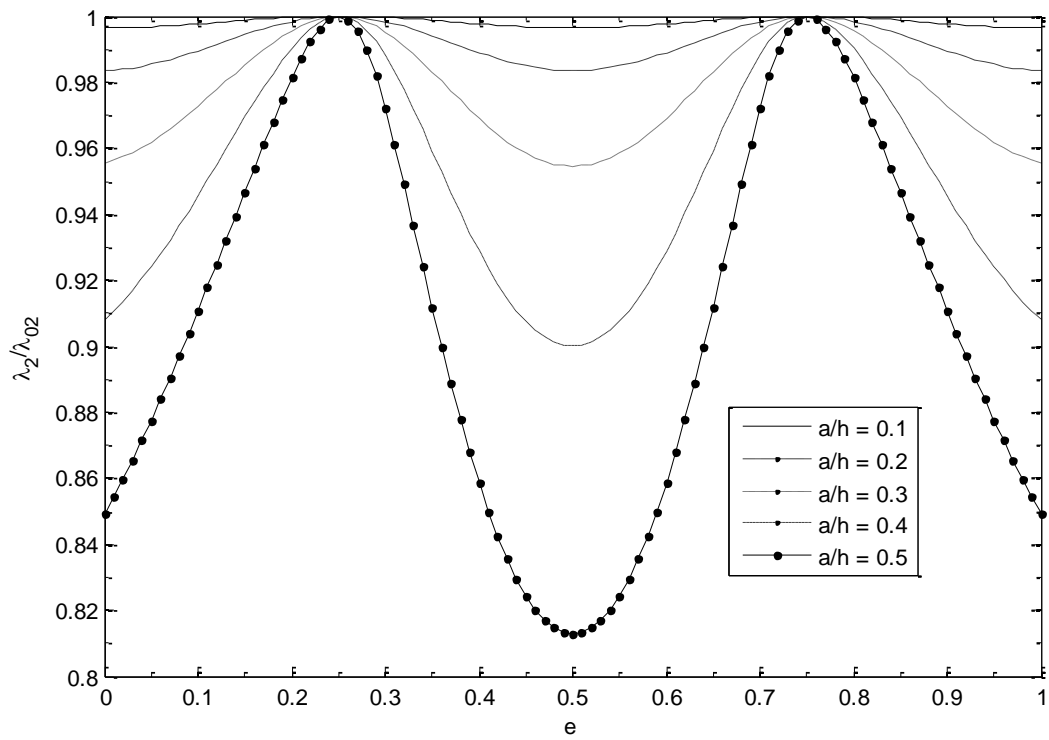
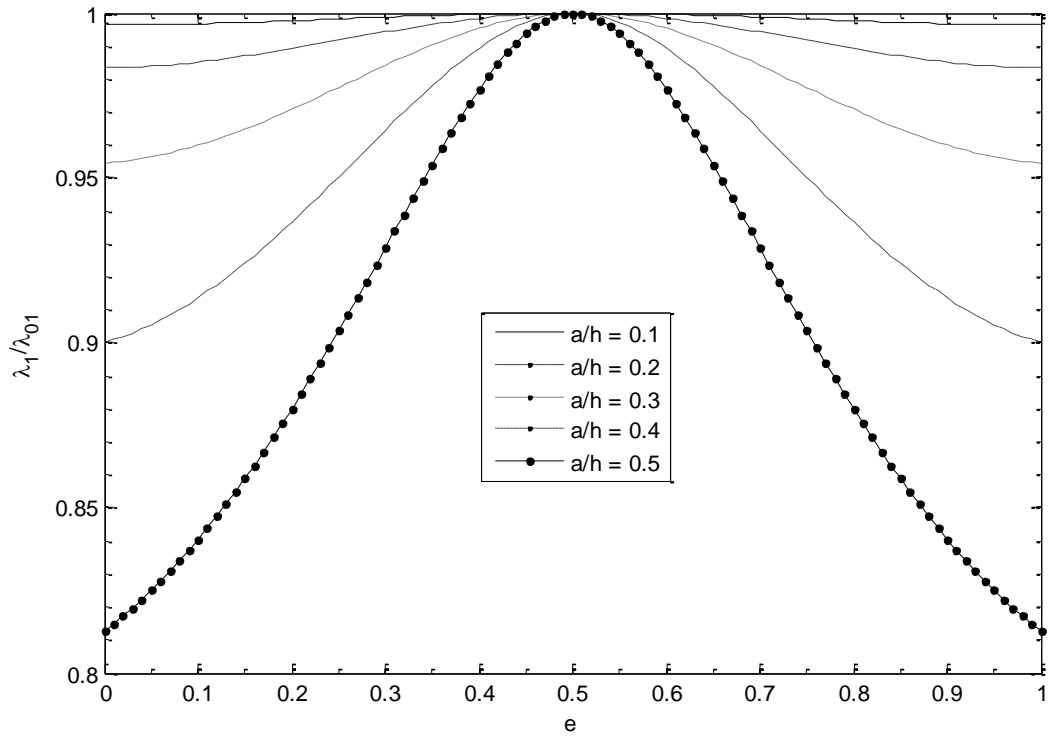


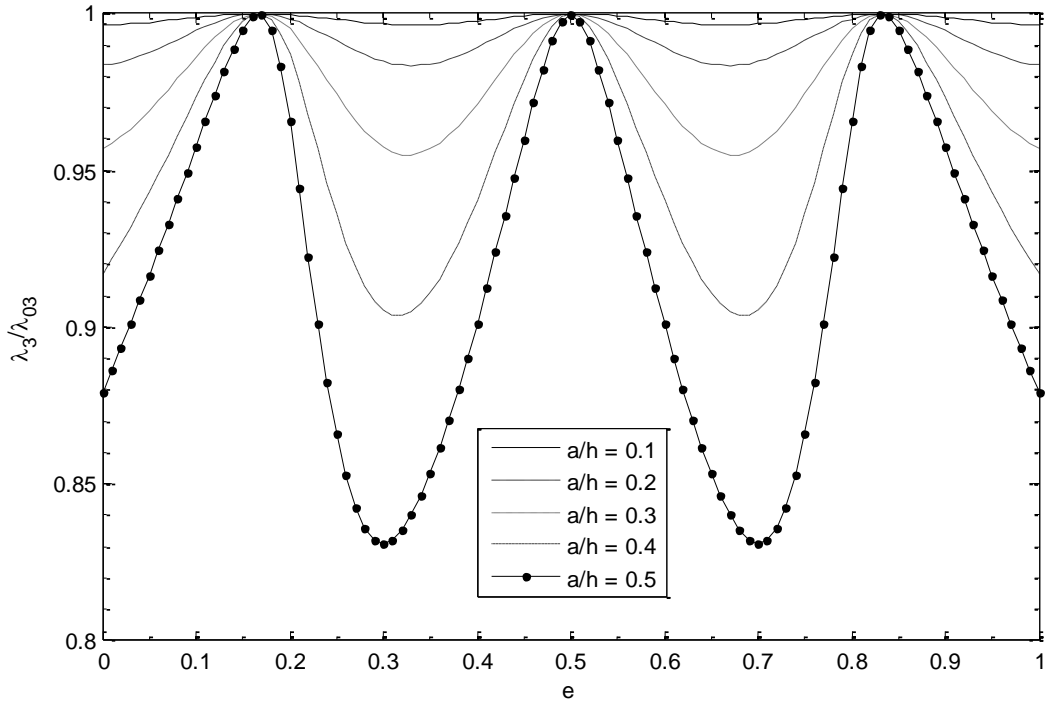
Bảng 3.2. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt tại vị trí $e_1=0.5$ lên 5 trị riêng đầu tiên so với kết quả tính bằng phương pháp ma trận truyền (TMM).

STT	λ							
	TMM [9]				Kết quả tính (Ngàm – Ngàm)			
	a/h				a/h			
	0	0.1	0.3	0.5	0	0.1	0.3	0.5
1	3.14159	3.14159	3.14159	3.14159	3.14159	3.14159	3.14159	3.14159
2	6.28319	6.26085	5.99779	5.10674	6.28319	6.26085	5.99779	5.10674
3	9.42478	9.42478	9.42478	9.42478	9.42478	9.42478	9.42478	9.42478
4	12.5664	12.5217	12.0063	10.6696	12.5664	12.5217	12.0063	10.6696
5	15.7080	15.7080	15.7080	15.7080	15.7080	15.7080	15.7080	15.7080

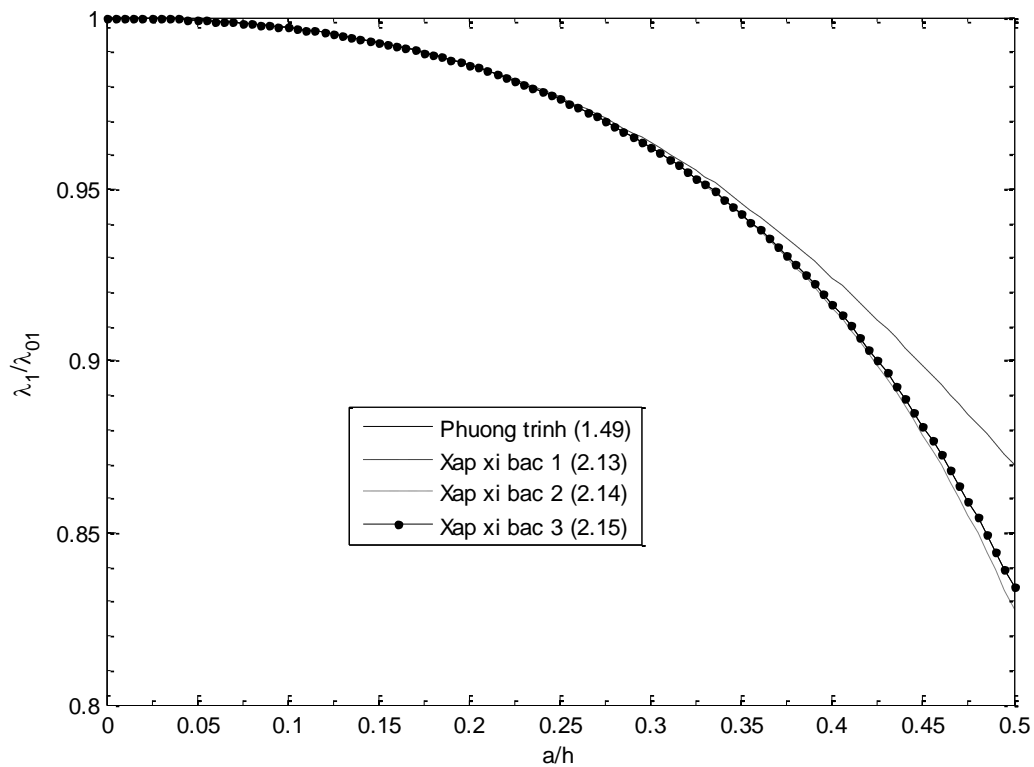


Hình 3.6. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên năm tần số đầu tiên cho thanh hai đầu ngàm – ngàm (một vết nứt tại 0.1).

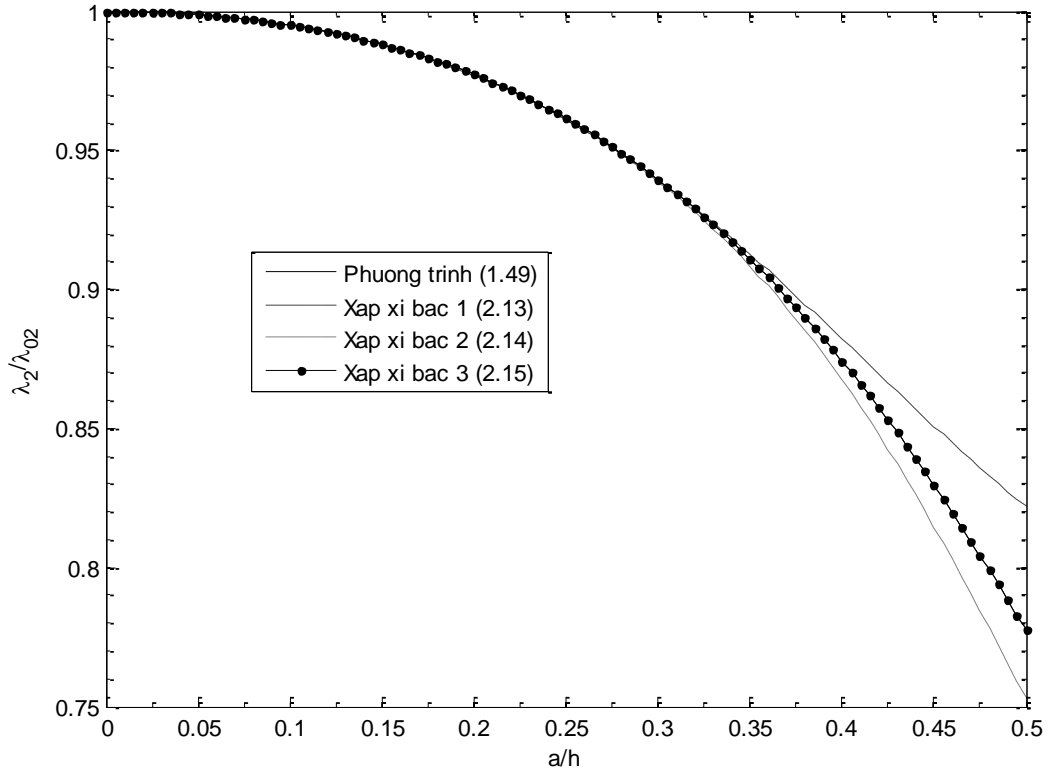




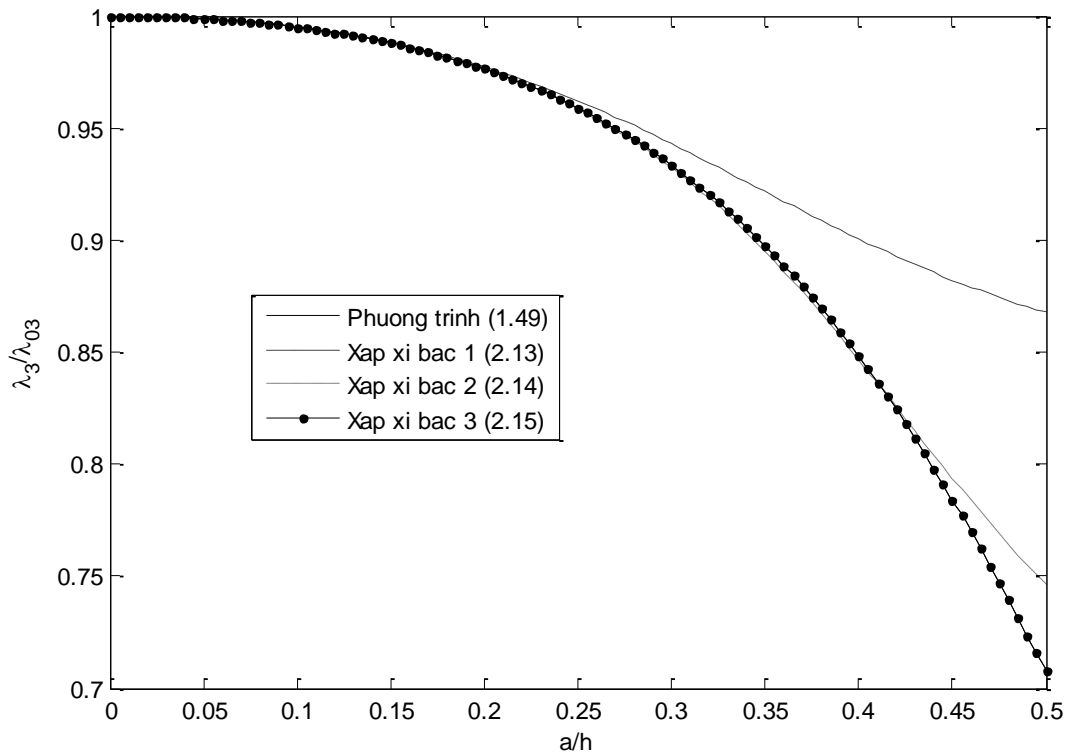
Hình 3.7. Ảnh hưởng của vị trí vết nứt lên ba tần số đầu tiên của thanh hai đầu ngàm – ngàm.



Hình 3.8. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ nhất đối với thanh hai đầu ngàm (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).

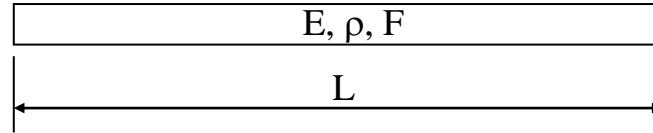


Hình 3.9. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ hai đối với thanh hai đầu ngàm (vết nứt tại vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).



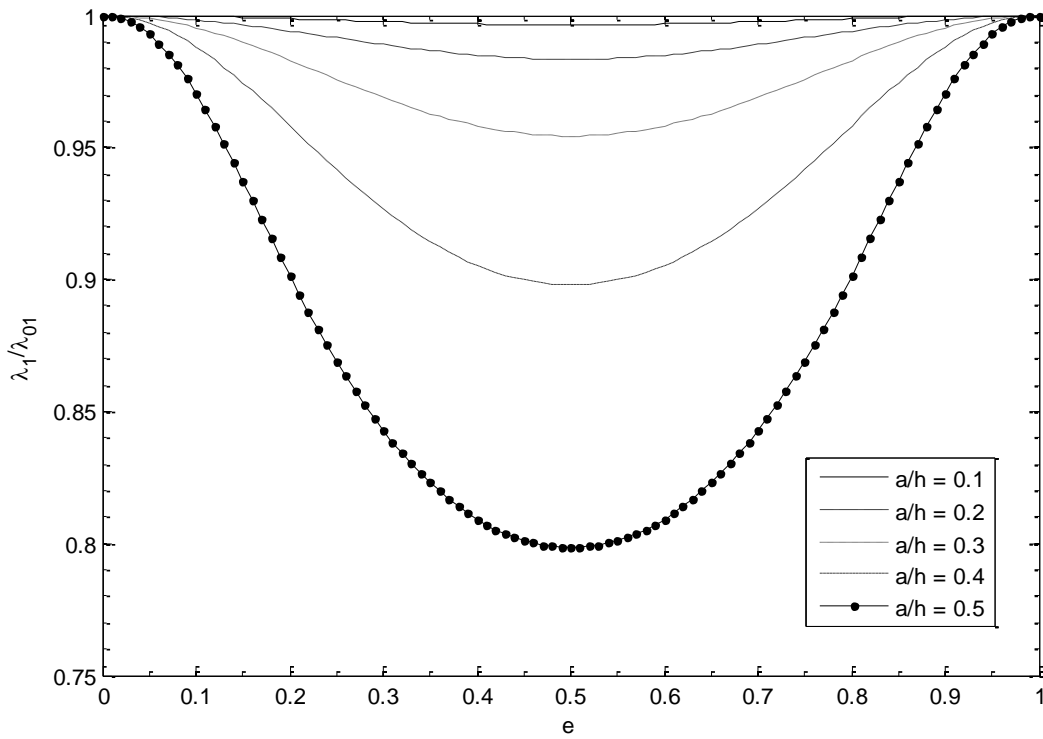
Hình 3.10. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ ba đối với thanh hai đầu ngàm (vết nứt tại vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).

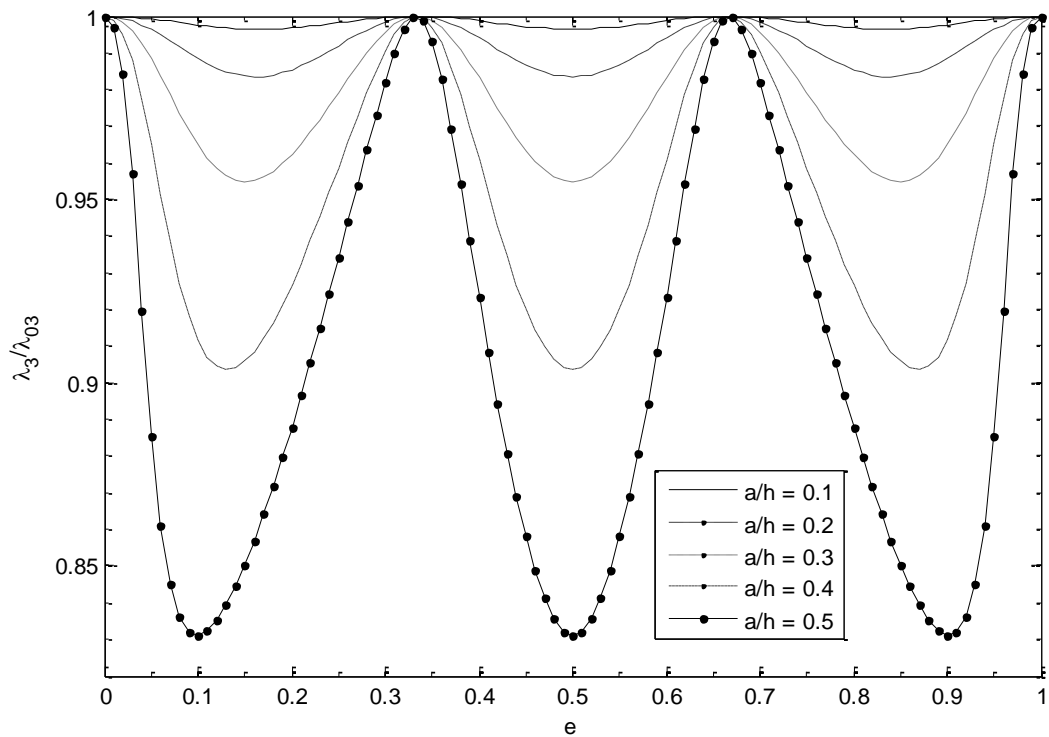
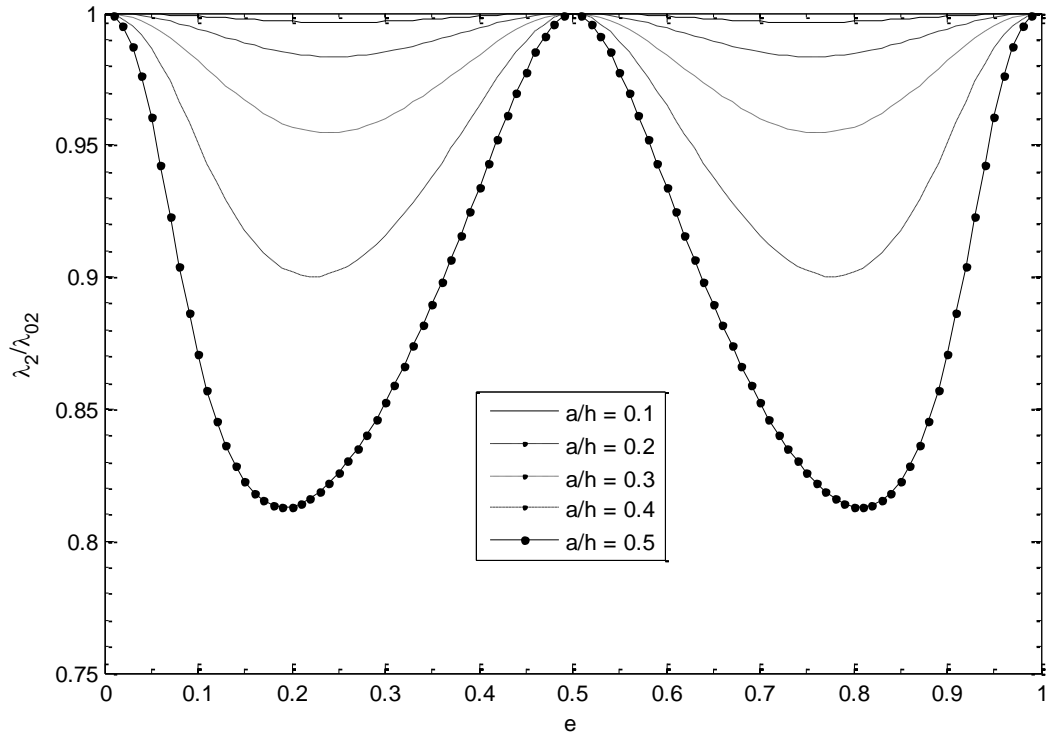
+ Trường hợp 3: Tự do – Tự do



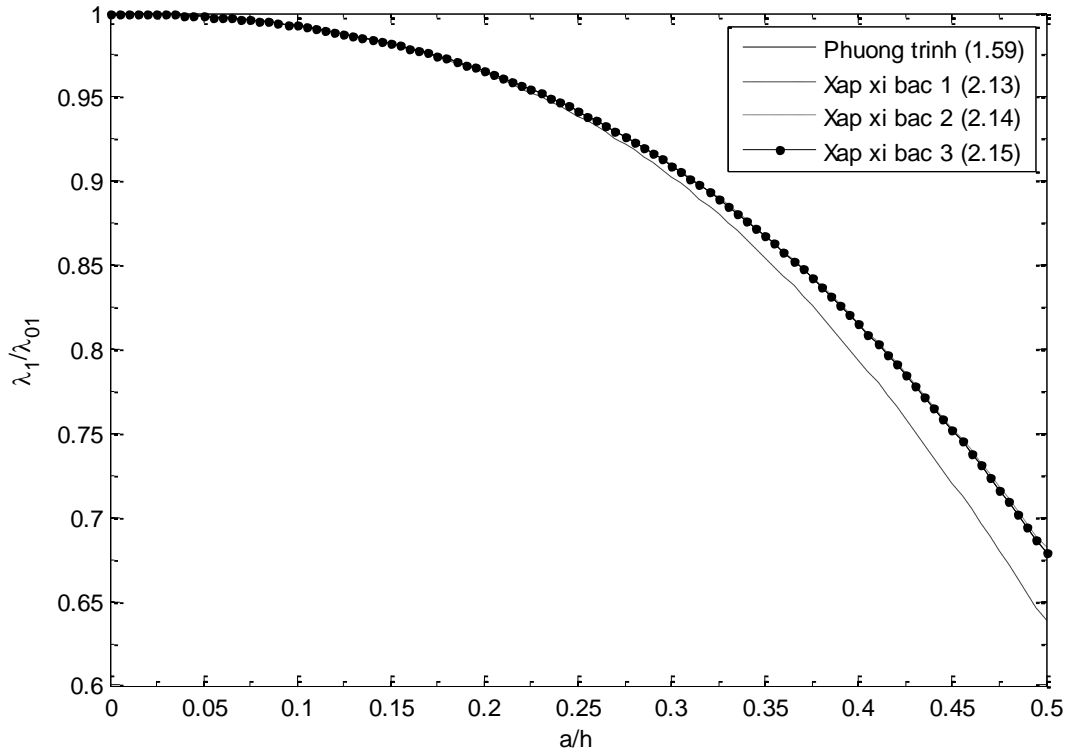
Bảng 3.3. Ảnh hưởng của độ sâu vết nứt tại vị trí $e_1=0.5$ lên 5 trị riêng đầu tiên so với kết quả tính bằng phương pháp ma trận truyền (TMM).

STT	λ							
	TMM [9]				Kết quả tính (Tự do – Tự do)			
	a/h				a/h			
	0	0.1	0.3	0.5	0	0.1	0.3	0.5
1	3.14159	3.13043	2.9982	2.50839	3.14159	3.13043	2.9982	2.50839
2	6.28319	6.28319	6.28319	6.28319	6.28319	6.28319	6.28319	6.28319
3	9.42478	9.39128	9.00009	7.83139	9.42478	9.39128	9.00009	7.83139
4	12.5664	12.5664	12.5664	12.5664	12.5664	12.5664	12.5664	12.5664
5	15.7080	15.6521	15.0173	13.5923	15.7080	15.6521	15.0173	13.5923

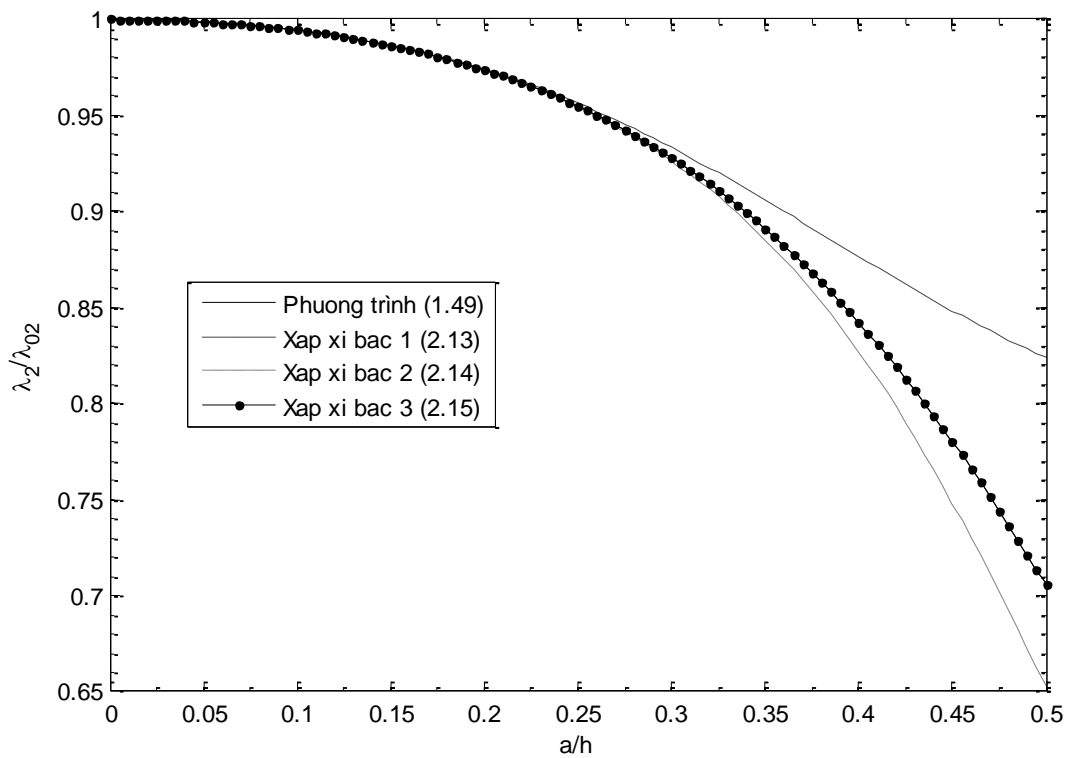




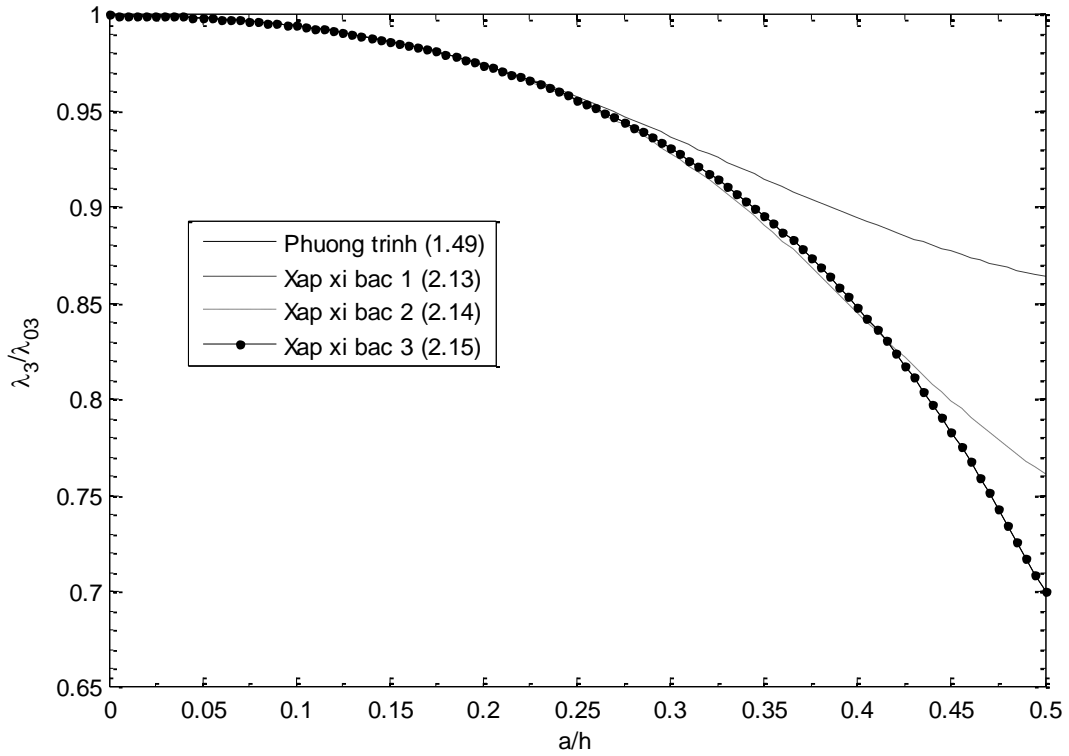
Hình 3.11. Ảnh hưởng của vị trí vết nứt lên ba tần số đầu tiên của thanh hai đầu tự do – tự do.



Hình 3.12. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ nhất đối với thanh hai đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).

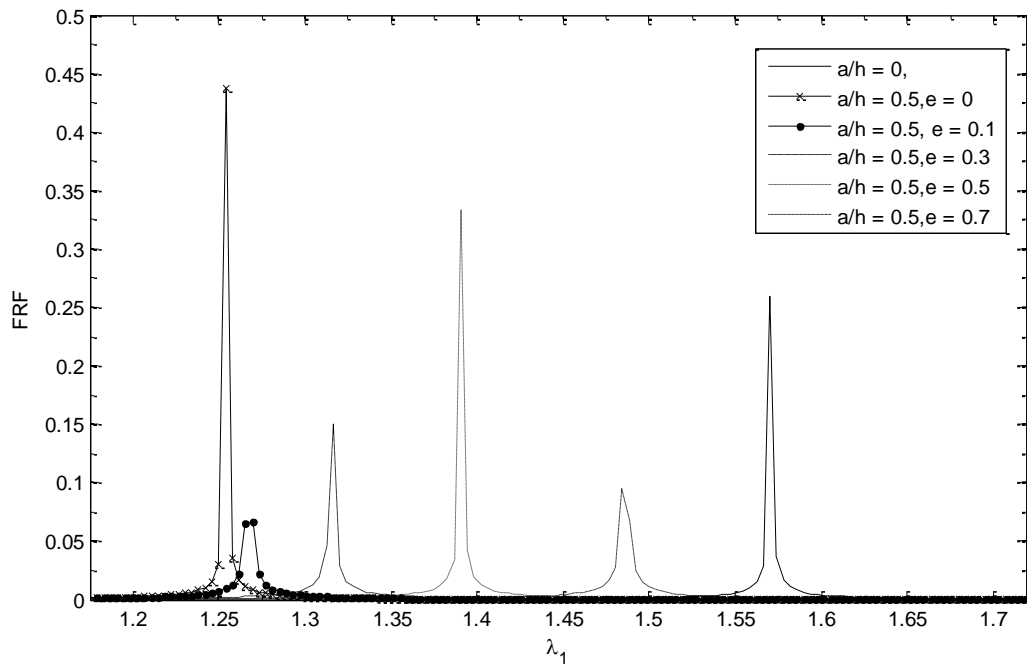


Hình 3.13. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ hai đối với thanh hai đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).

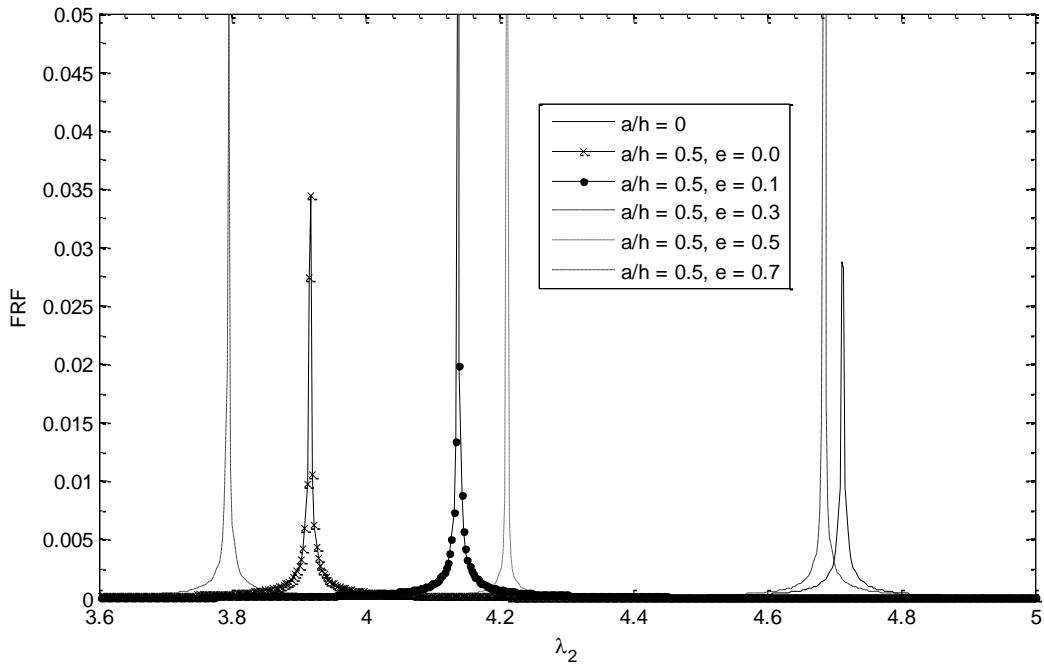


Hình 3.14. Kết quả tính toán so sánh ảnh hưởng của độ sâu vết nứt lên các tần số riêng thứ ba đối với thanh hai đầu tự do (3 vết nứt tại ba vị trí 0.2, 0.4 và 0.6).

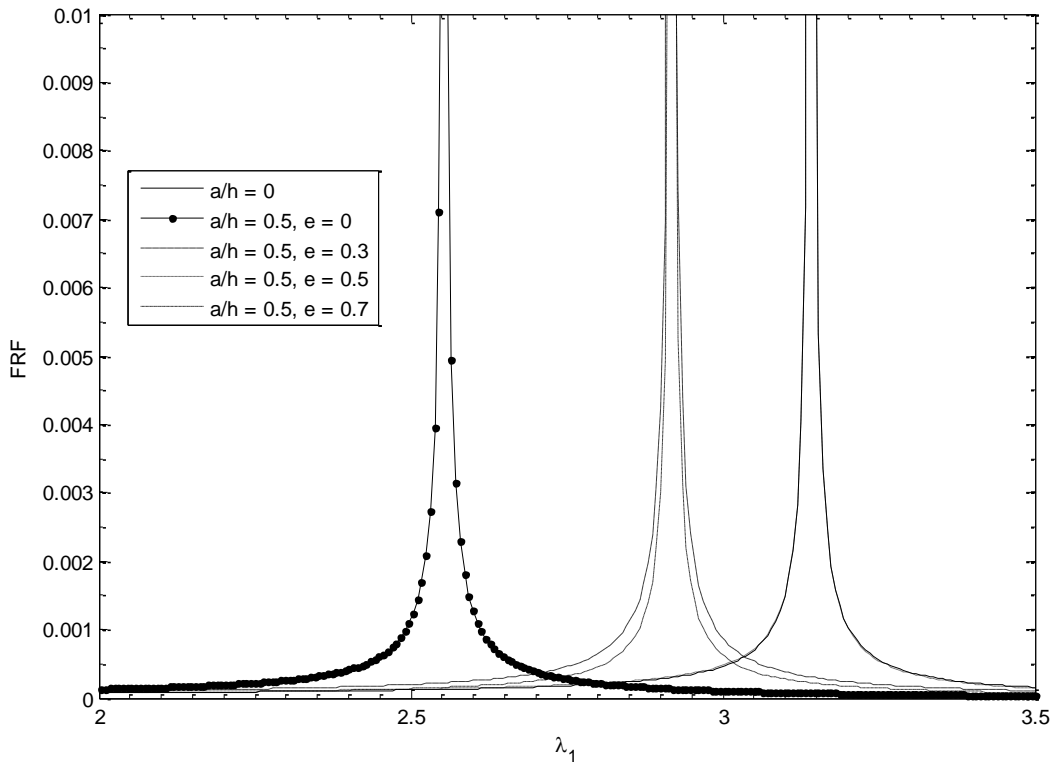
3.2. Ảnh hưởng của vết nứt đến hàm đáp ứng tần số



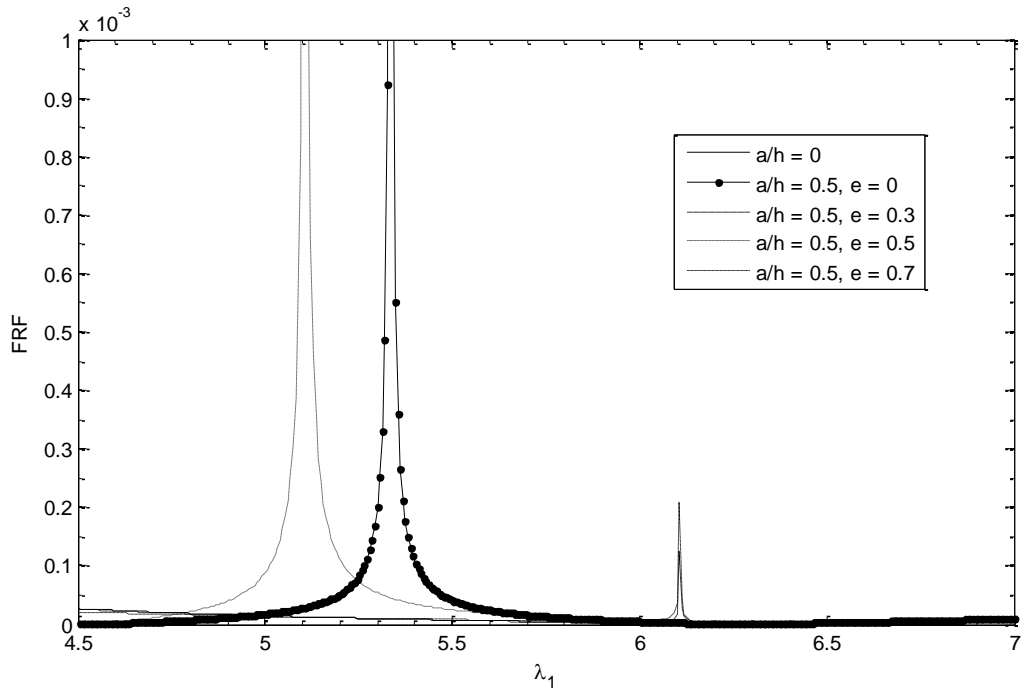
Hình 3.15. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ nhất của thanh một đầu ngàm – một đầu tự do ($a/h = 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 1$, điểm đo $x = 1$)



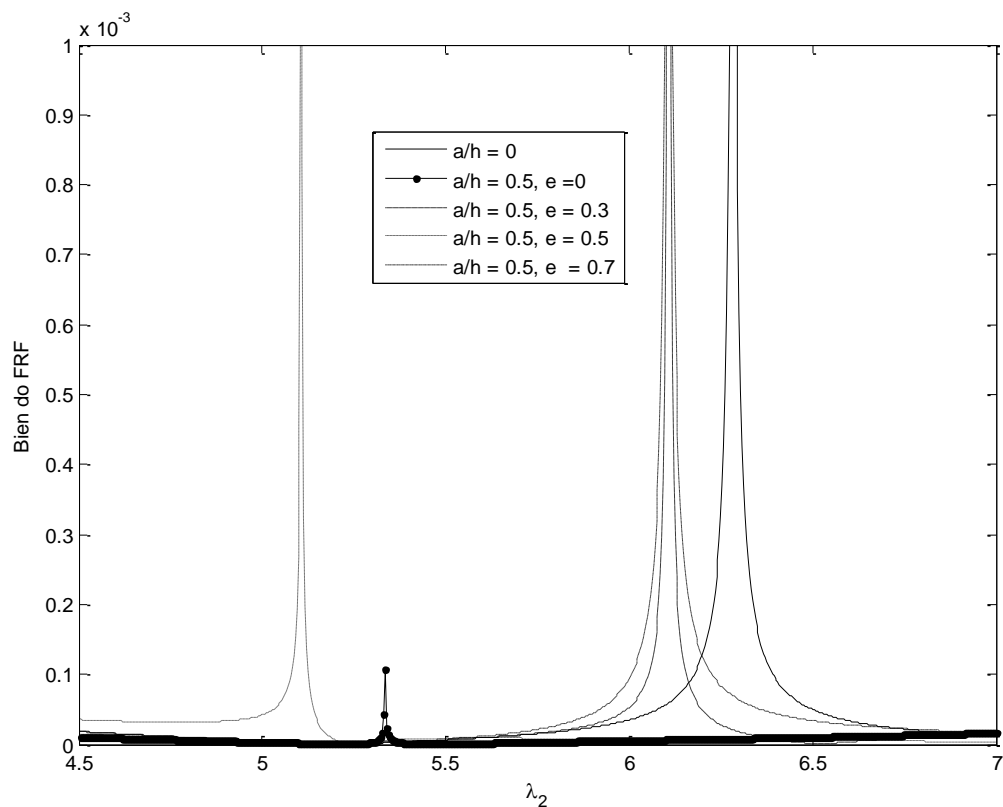
Hình 3.16. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ hai của thanh một đầu ngàm – một đầu tự do ($a/h = 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 1$, điểm đo $x = 1$)



Hình 3.17. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ nhất của thanh ngàm – ngàm ($a/h = 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 0.5$, điểm đo $x = 0.5$)



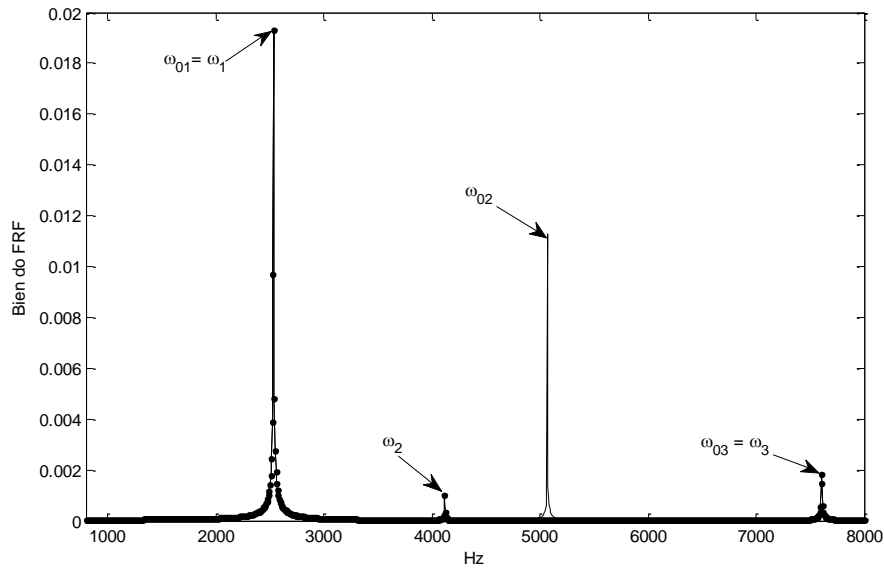
Hình 3.18. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ hai của thanh ngàm – ngàm ($a/h = 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 0.5$, điểm đo $x = 0.5$)



Hình 3.19. Ảnh hưởng của vị trí 1 vết nứt lên hàm đáp ứng tần số thứ hai của thanh ngàm – ngàm ($a/h = 0.5$, đặt lực tại $x_0 = 0.4$, điểm đo $x = 0.4$)

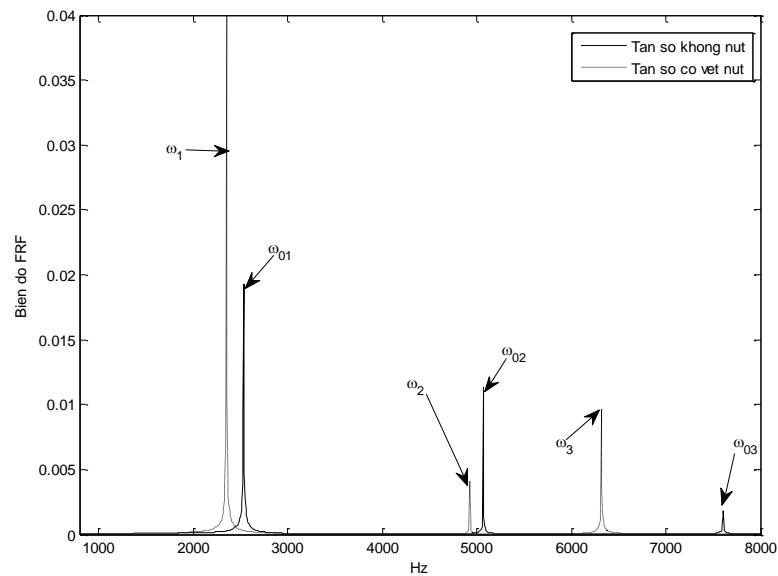
3.3. Kết quả chẩn đoán

a) Chẩn đoán một vết nứt trong thanh bằng đo hàm đáp ứng tần số giả định bằng lý thuyết



Hình 3.20. Biên độ đáp ứng tần số (FRF) của thanh ngàm hai đầu với một vết nứt giả định tại $e = 0.5$ với (đặt lực tại $x_0 = 0.4$, điểm đo $x = 0.4$).

Như vậy theo lý thuyết, đối với trường hợp thanh ngàm hai đầu nếu ta đo được hàm đáp ứng tần số như hình trên ta có thể dự đoán được vị trí vết nứt tại điểm giữa của thanh tức là $e = 0.5$. Từ đó thay vào công thức (2.19) ta xác định được độ lớn vết nứt γ và dựa vào công thức thực nghiệm trong Phụ lục I, ta tính được chiều sâu vết nứt a . Tuy nhiên, nếu cả ba tần số đều thay đổi (Hình 3.21) thì việc chẩn đoán chỉ dựa vào hàm này là khó khăn hơn.



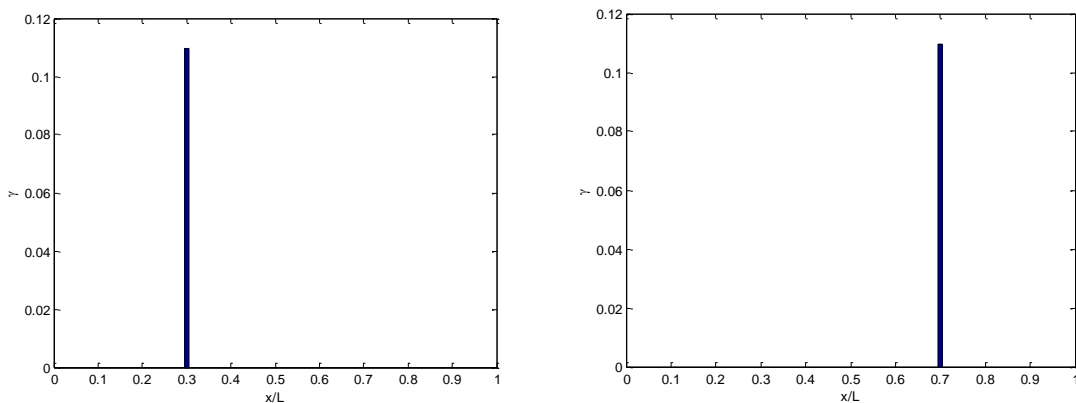
Hình 3.21. Biên độ đáp ứng tần số của thanh hai đầu ngàm với một vết nứt.

b) Chẩn đoán bằng tần số riêng – qui trình chẩn đoán

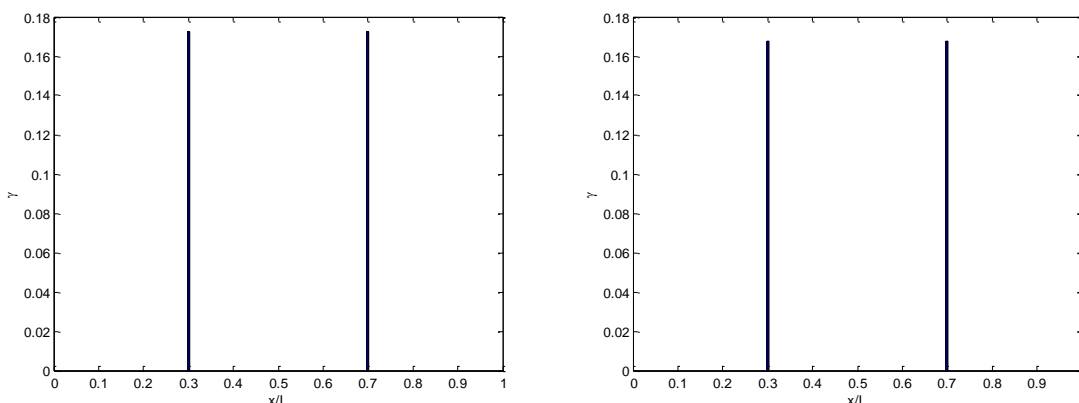
+ Xét thanh có số liệu sau: mô đun đàn hồi $E = 7.2e^{10} \text{N/m}^2$. Khối lượng riêng $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$. Hệ số Poisson $\nu = 0.35$, chiều rộng của thanh $b = 0.006 \text{m}$, chiều cao mặt cắt ngang của thanh $h = 0.023 \text{m}$ và có chiều dài $L = 0.235 \text{m}$.

+ Xem xét chẩn đoán cho thanh có một hoặc hai vết nứt với giả thiết số phương trình bằng số ẩn (tức là số tần số bằng số vết nứt), hoặc số tần số ít hơn số vết nứt trong trường hợp chưa có điều chỉnh Tikhonov.

+ Số liệu sử dụng chẩn đoán: do không có số liệu thí nghiệm, với mục đích thử qui trình chẩn đoán thanh đã nêu trong lý thuyết. Do vậy số liệu đo được giả thiết là số liệu tính từ lý thuyết.



Hình 3.22 . Kết quả chẩn đoán cho thanh ngàm hai đầu cho thanh có 1 vết nứt với giả thiết số phương trình bằng số ẩn ($\lambda_1=2.917826964$).



a)

b)

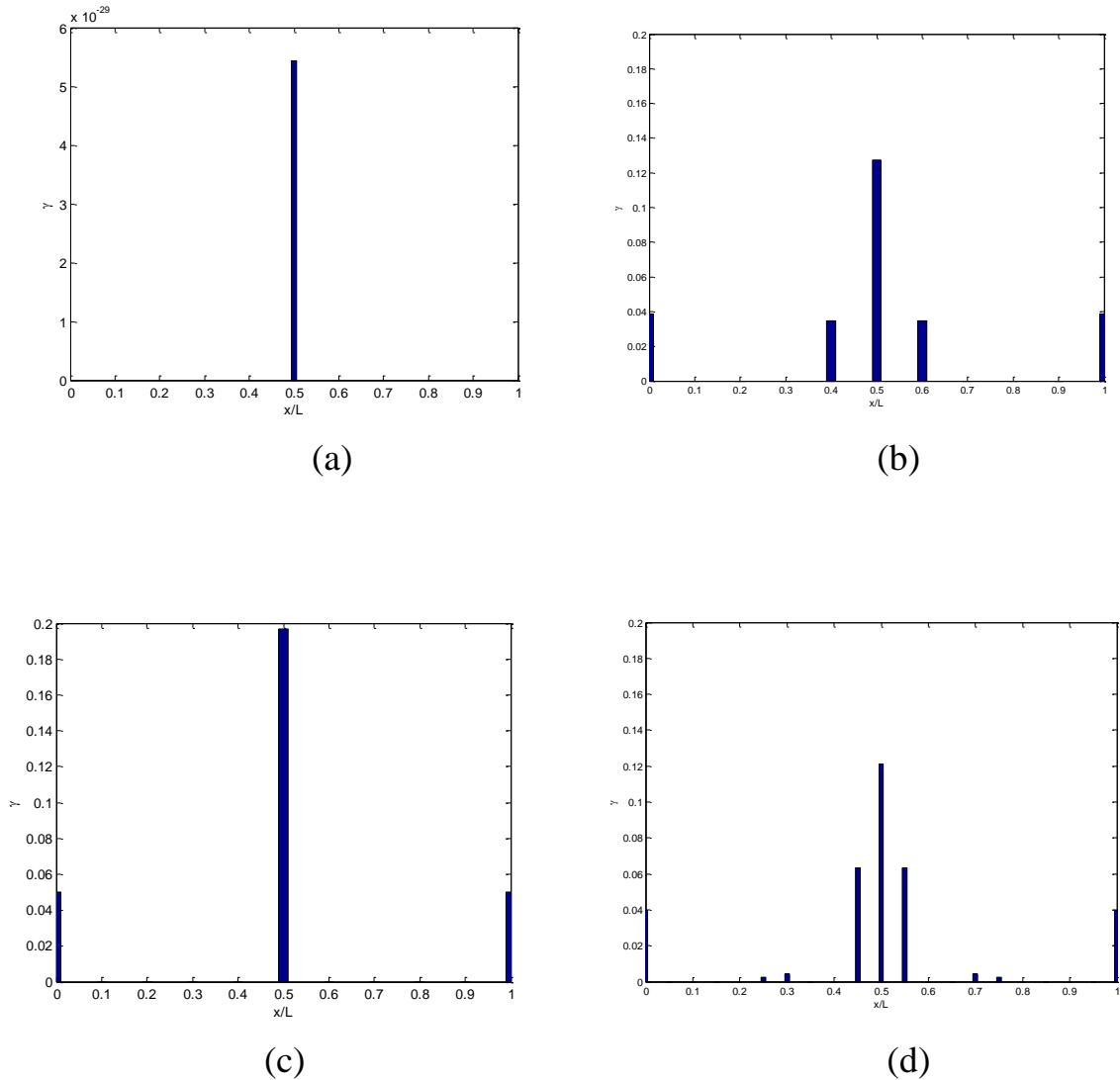
Hình 3.23. Kết quả chẩn đoán cho thanh ngàm hai đầu có 2 vết nứt giả định tại vị trí $e_1=0.3$, $e_2=0.7$ với giả thiết số phương trình bằng số ẩn.

a) Trị riêng (tần số) tính từ xấp xỉ bậc hai ($\lambda_1=2.647044658$, $\lambda_2=6.019655976$).

b) Trị riêng (tần số) tính từ xấp xỉ bậc nhất ($\lambda_1=2.777560096$, $\lambda_2=5.93453049$).

+ Giả sử vết nứt tại vị trí $e = 0.5$ của thanh ngàm hai đầu, lý thuyết ta tính được các tần số - (tính được trị riêng) như sau:

$$\lambda_1 = 3.14159, \lambda_2 = 5.10674, \lambda_3 = 9.42478, \lambda_4 = 10.6696, \lambda_5 = 15.708$$



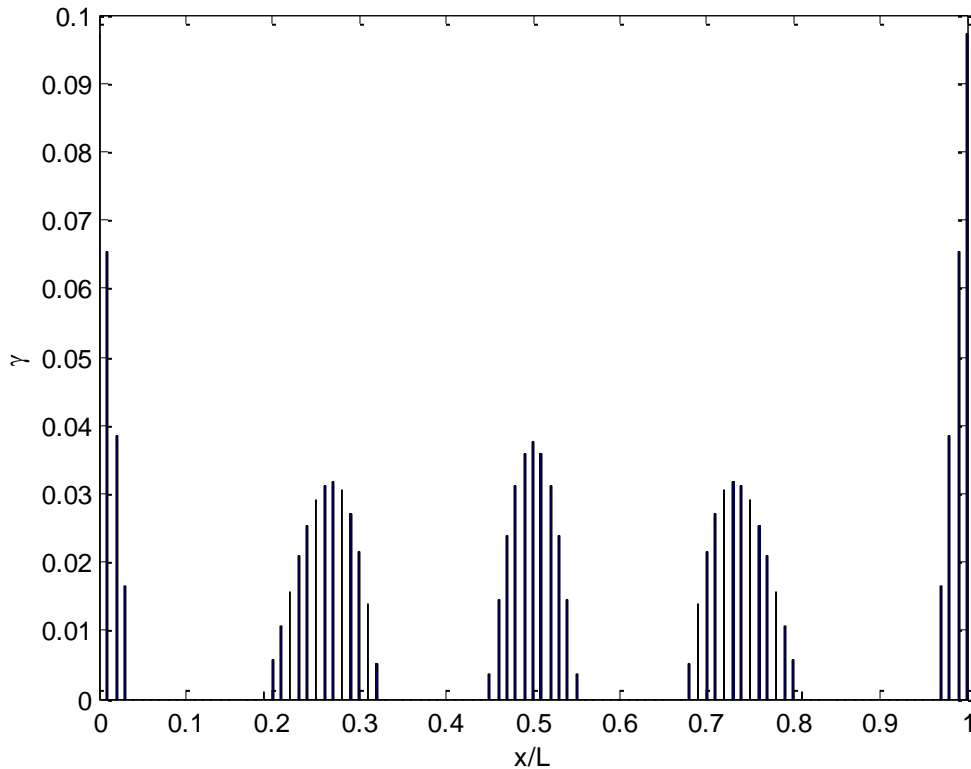
Hình 3.24. Kết quả chẩn đoán cho thanh ngàm hai đầu với 1 vết nứt giả định tại vị trí $e = 0.5$. (tần số chẩn đoán tính theo lý thuyết).

a) với lưới quét 1 điểm chia – một tần số đầu tiên.

b) với lưới quét 10 điểm chia – ba tần số đầu tiên.

c) với lưới quét 10 điểm chia – năm tần số đầu tiên.

d) với lưới quét 20 điểm chia – năm tần số đầu tiên.



Hình 3.25. Kết quả chặn đoán cho thanh ngàm hai đầu có vết nứt tại vị trí $e_1=0.3$ và $e_2=0.7$ với lưới quét 100 điểm chia, sử dụng 5 tần số đầu tiên.

3.4. Kết luận Chương 3

Nghiên cứu ảnh hưởng của vị trí và độ sâu vết nứt qua các kết quả số ta thấy rằng: các kết quả nhận được phù hợp với kết quả đã biết. Điều đó chứng tỏ các phương trình tần số lập được trong luận văn này là đúng đắn. Vị trí các điểm nứt tần số trên các đồ thị hoàn toàn phù hợp với kết quả tính toán giải tích ở Chương 2.

Những điểm nứt tần số là một kết quả mới cung cấp cho ta những dấu hiệu đầu tiên để xác định vị trí vết nứt.

Khi nghiên cứu ảnh hưởng của vết nứt đến hàm đáp ứng tần số chúng ta thấy rằng: vết nứt đã làm cho các đỉnh của hàm đáp ứng tần số bị tách ra và khoảng cách giữa chúng phụ thuộc vào độ sâu và vị trí vết nứt. Đây là một dấu hiệu quan trọng để chặn đoán vết nứt bằng hàm đáp ứng tần số.

Kết quả giải thử nghiệm bài toán chặn đoán vết nứt bằng tần số riêng nêu trên cho thấy hoàn toàn có thể xác định được vị trí các vết nứt sử dụng phương trình đặc trưng đã được thiết lập nêu trên và các tần số riêng đo được.

KẾT LUẬN CHUNG

Những kết quả chính đã nhận được trong luận văn này như sau:

1. Đã xây dựng được lý thuyết dao động dọc trục của thanh có nhiều vết nứt trong miền tần số sử dụng mô hình lò xo tương đương để mô tả vết nứt. Cụ thể là đã thiết lập được biểu thức hiển của phương trình tần số và hàm đáp ứng tần số của thanh với điều kiện biên tổng quát (bao hàm các điều kiện biên cố định và các liên kết đàn hồi). Đặc biệt, thiết lập được biểu thức của phương trình tần số ở dạng đa thức của độ lớn vết nứt. Phương trình này là công cụ hữu hiệu để chẩn đoán vết nứt bằng tần số riêng;
2. Đã xây dựng được thuật toán chẩn đoán đa vết nứt trong thanh bằng cách đo đặc tần số riêng của dao động dọc trục dựa trên phương pháp dò tìm vết nứt của GS. Nguyễn Tiến Khiêm kết hợp với phương pháp điều chỉnh Tikhonov để giải quyết vấn đề thiếu số liệu và sai số trong số liệu đo.
3. Đã nghiên cứu chi tiết ảnh hưởng của vết nứt đến tần số riêng, hàm đáp ứng tần số cho thanh với điều kiện biên cố định. Kết quả cho thấy các biểu thức, phương trình đã thiết lập được trong luận văn này là đúng đắn, có thể sử dụng trong tính toán và chẩn đoán vết nứt trong kết cấu.
4. Đã thử nghiệm phương pháp dò tìm vết nứt kết hợp với phương pháp điều chỉnh Tikhonov và kết quả nhận được minh chứng cho tính hiệu quả của lý thuyết đã được phát triển trong luận văn.
5. Vấn đề tìm số lượng vết nứt và chẩn đoán đa vết nứt cho thanh bằng dao động dọc trục vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn trong luận văn này, nên đây là vấn đề còn phải nghiên cứu tiếp.

CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN VĂN

1. N.T. Khiem, L.K. Toan, N.T.L. Khue (2013) Change in mode shape nodes of multiple cracked bar: I. The theoretical study. Vietnam Journal of Mechanics, Vol. 35, No. 3, 175-188;
2. N.T. Khiem, L.K. Toan, N.T.L. Khue (2013) Change in mode shape nodes of multiple cracked bar: II. Numerical analysis. Vietnam Journal of Mechanics, Vol. 35, No. 4, 299-311.

TÀI LIỆU THAM KHẢO**Tiếng Anh**

1. Doebling SW, Farrar CR, Prime MB, Shevitz DW (1996). “Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in Their Vibration Characteristics”. A Literature Review. Report LA-13070-MS, Los Alamos National Laboratory, New Mexico.
2. Sohn H, Farrar CR, Hemez FM, Shunk DD, Stinemates DW, Nadler BR and Czarnecki JJ (2004). “A Review of Health Monitoring Literature 1996-2001”. Report No LA-13976-MS, Los Alamos National Laboratory, New Mexico.
3. Fan W, Qiao PZ (2011), “Vibration-based Damage Identification Methods”: A Review and Comparative Study. *Structural Health Monitoring*, 10(1): 83-111.
4. Adams RD, Cawley P, Pye CJ, Stone BJ (1978). “A vibration technique for non-destructive assessing the integrity of structures”. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20: 93-100.
5. Haisty B.S. and Springer W.T. (1998). “A general beam element for use in damage assessment of complex structures”. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and reliability in Design*. Transactions of the ASME, 110: 389-394.
6. Chondros T.G., Dimarogonas A.D. and Yao J. (1998) Longitudinal vibration of a continuous cracked bar. *Engineering Fracture Mechanics*, 61: 593-606.
7. Narkis Y (1994). “Identification of crack location in vibrating simply supported beams”. *Journal of Sound and Vibration*, 172: 549-558.
8. Morassi A (2001). “Identification of a crack in a rod based on changes in a pair of natural frequencies”. *Journal of Sound and Vibration*, 242(4): 577-596.
9. Ruotolo R, Surace C (2004). “Natural frequencies of a bar with multiple cracks”. *Journal of Sound and Vibration* 272: 301-316.
10. Davini C., Morassi A. and Rovere N. (1995). “Modal Analysis of Notched Bars”: Tests and Comments on Sensitivity of an Identification Technique. *Journal of Sound and Vibration*, 179(3), 513-527.
11. Dilena M and Morassi A (2003). “Detecting cracks in a longitudinal vibrating beam with dissipative boundary conditions”. *Journal of Sound and Vibration* 267, 87-103.

12. Dilella M, Morassi A (2009). “Structural Health Monitoring of Rods based on Natural Frequency and Antiresonant Frequency Measurements”. *Structural Health Monitoring*, 8: 149-172.
13. Gladwell GML, Morassi A (1999). “Estimating damage in a rod from changes in node positions”. *Inverse Problems in Engineering*, 7: 215-233.
14. Khiem N.T., Hang P.T., Toan L.K. (2016). “Crack detection in pile by measurements of frequency response function”. *Nondestructive Testing and Evaluation*, Vol. 31, No. 2, 142-164.
15. Nguyen Tien Khiem and Hai Thanh Tran (2014). “A procedure for multiple crack identification in beam-like structure from natural vibration mode”. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 20, No. 9, 1417-1427.
16. Khiem N.T. and Toan L.K. (2014). “A novel method for crack detection in beam-like structure by measurement of natural frequencies”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333 No.18, 4084-4103.
17. Singiresu S. Rao (1990), “Mechanical Vibrations”. Addison – Wesley Publishing Company.

Tiếng Việt

18. Trần Thanh Hải (2012). Chẩn đoán vết nứt trong dầm đàn hồi bằng phương pháp đo dao động. Luận án tiến sỹ Cơ học, Viện Cơ học Hà Nội.
19. Nguyễn Văn Khang (2001). “Dao động kỹ thuật”, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật.
20. Nguyễn Tiến Khiêm (2008) Nhập môn Chẩn đoán kỹ thuật công trình. NXB KHTN&CN.

PHỤ LỤC I

Công thức tính độ cứng lò xo tương đương trong mô hình vết nứt

1. Theo *B.S. Haistty and W.T. Springer, A general beam element for use in damage assessment of complex structures. Journal of Vibration, Accoustics, Stress and reliably in Design, Transactions of the ASME, 1988, V 110, 389-394:*

$$\gamma = EF / KL = \frac{\pi h}{L} f(z), \quad z = a / h, \quad (\text{A1.1})$$

$$f(z) = z^2(0.7442 - 0.8463z + 1.376z^2 - 0.7540z^3 + 0.5470z^4), \quad (\text{A1.2})$$

2. Theo *T.G. Chondros, A.D. Dimarogonas and J. Yao, Longitudinal vibration of a continuous cracked bar. Engineering Fracture Mechanics, 1998, 61, 593-606:*

$$\gamma = EF / KL = 2\pi(1 - \nu^2)(h / L)f(z), \quad z = a / h, \quad (\text{A1.3})$$

$$f(z) = z^2(0.6272 - 0.17248z + 5.92134z^2 - 10.7054z^3 + 31.5685z^4 - 67.47z^5 + 139.123z^6 - 146.682z^7 + 92.3552z^8), \quad (\text{A1.4})$$

3. Theo *R. Ruotolo and C. Surace, Natural frequencies of a bar with multiple cracks. Journal of Sound and Vibration, 272, 2004, 301-316:*

$$\gamma = EF / KL = 2(1 - \nu^2)(h / L)f(z), \quad z = a / h, \quad (\text{A1.5})$$

$$f(z) = 0.9852z^2 + 0.2381z^3 - 1.0368z^4 + 1.2055z^5 + 0.5803z^6 - 1.0368z^7 + 0.7314z^8. \quad (\text{A1.6})$$

Trong đó: a - độ sâu vết nứt, h - chiều dày của thanh, ν - hệ số Poisson của vật liệu.

PHỤ LỤC II

KHAI TRIỂN KỶ DỊ MA TRẬN VÀ ỨNG DỤNG

Trước hết ta xét một ma trận hằng \mathbf{A} có kích thước $m \times n$. Người ta đã chứng minh được một khai triển của ma trận \mathbf{A} ở dạng:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{V}^T \quad (\text{A2.1})$$

trong đó \mathbf{U}, \mathbf{V} là các ma trận trực giao cấp m và n , tức

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_n \quad (\text{A2.2})$$

và $\mathbf{\Sigma}$ là ma trận có cùng kích cỡ như \mathbf{A} và chỉ có phần tử đường chéo là khác 0 và không âm, ký hiệu là

$$\mathbf{\Sigma}(m \times n) = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}, \quad q = \min(m, n).$$

Các số $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ được gọi là giá trị kỳ dị của ma trận \mathbf{A} và biểu diễn (A2.1) gọi là khai triển kỳ dị của ma trận \mathbf{A} .

Ngoài ra còn có thể chứng minh được rằng

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}}_k = \sigma_k \bar{\mathbf{v}}_k, \quad \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{u}}_k = \sigma_k \bar{\mathbf{v}}_k, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{u}}_k = \sigma_k^2 \bar{\mathbf{u}}_k, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{v}}_k = \sigma_k^2 \bar{\mathbf{v}}_k, \quad k = 1, \dots, r. \quad (\text{A2.3})$$

Tức các véc tơ cột $\bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k, k = 1, \dots, r$ của các ma trận \mathbf{U}, \mathbf{V} là các véc tơ riêng và bình phương các giá trị kỳ dị của ma trận \mathbf{A} chính là các trị riêng của các ma trận $\mathbf{A}\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Nếu ma trận \mathbf{A} đối xứng thì

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}.$$

Khi đó có thể viết lại biểu thức của khai triển kỳ dị nêu trên ở dạng

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^r \sigma_k \bar{\mathbf{u}}_k \bar{\mathbf{v}}_k^T, \quad r = \text{rank} \mathbf{A}. \quad (\text{A2.4})$$

Hơn nữa, ma trận nghịch đảo suy rộng, hay còn gọi là ma trận nghịch đảo Moore-Penrose của ma trận \mathbf{A} sẽ có khai triển kỳ dị

$$\mathbf{A}^+ \equiv (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T, \quad (\text{A2.5})$$

trong đó ma trận $\mathbf{\Sigma}^+$ nhận được từ ma trận $\mathbf{\Sigma}$ bằng cách thay các giá trị khác 0 bằng giá trị nghịch đảo, còn các giá trị 0 vẫn giữ nguyên và sau đó đổi hàng thành cột (chuyển vị).

$$\text{Bây giờ ta xét phương trình :} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \quad (\text{A2.6})$$

trong trường hợp \mathbf{A} vuông ($m = n$) nhưng có định thức bằng 0, tức có giá trị kỳ dị bằng 0. Giả sử các giá trị kỳ dị của ma trận \mathbf{A} khác 0 là $\sigma_1, \dots, \sigma_r, r < n$, tức

$$\sigma_k = 0, \quad k = r + 1, \dots, n.$$

Khi đó

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{v}}_{k'} = \sum_{k=1}^r \sigma_k \bar{\mathbf{u}}_k \bar{\mathbf{v}}_k^T \bar{\mathbf{v}}_{k'} = \sum_{k=1}^r \sigma_k (\bar{\mathbf{v}}_k^T \bar{\mathbf{v}}_{k'}) \bar{\mathbf{u}}_k = 0, \quad \forall k' = r + 1, \dots, n. \quad (\text{A2.7})$$

Như vậy, nghiệm khác 0 của phương trình thuần nhất nêu trên chính là $(n-r)$ véc tơ kỳ dị phải của ma trận \mathbf{A} tương ứng với các giá trị kỳ dị bằng 0. Chúng tạo thành không gian Null của ma trận \mathbf{A} . Không gian Null có số chiều (dimension) là $(n-r)$ với cơ sở trực giao là các véc tơ $\bar{\mathbf{v}}_{k'}, k' = r+1, \dots, n$. Điều này có nghĩa là một nghiệm bất kỳ của phương trình thuần nhất

$$\mathbf{Ax} = 0$$

luôn có thể biểu diễn bằng

$$\mathbf{x}_{nul} = \sum_{k=1}^{n-r} c_k \bar{\mathbf{v}}_{r+k} \quad (\text{A2.8})$$

với các hằng số c_k bất kỳ. Trong trường hợp ma trận \mathbf{A} không vuông, giải sử

$$\text{rank}\mathbf{A} = r \leq m < n,$$

thì không gian Null của ma trận \mathbf{A} cũng sẽ là các véc tơ $\bar{\mathbf{v}}_{k'}, k' = r+1, \dots, n$.

Ta xét phương trình không thuần nhất

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (\text{A2.9})$$

khi đó ta có

$$\mathbf{Ax} = \sum_{k=1}^r \sigma_k \bar{\mathbf{u}}_k \bar{\mathbf{v}}_k^T x = \sum_{k=1}^r \sigma_k (\bar{\mathbf{v}}_k^T x) \bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{b} \Rightarrow x_k = (\bar{\mathbf{v}}_k^T x) = \bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{b} / \sigma_k, k = 1, \dots, r.$$

Như vậy, ta có một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất bằng

$$\mathbf{x}' = \sum_{k=1}^r \frac{\bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{b}}{\sigma_k} \bar{\mathbf{v}}_k \quad (\text{A2.10})$$

và nghiệm tổng quát của nó sẽ là

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \sum_{k=1}^{n-r} c_k \bar{\mathbf{v}}_{r+k} = \mathbf{x}' + \mathbf{V}_r \mathbf{c}, \quad (\text{A2.11})$$

trong đó \mathbf{V}_r là ma trận tạo thành từ $n-r$ véc tơ cột và \mathbf{c} là véc tơ các hằng số tùy ý $\{c_j, j = 1, \dots, n-r\}$. Nếu ta chọn các hằng số \mathbf{c} bằng một ràng buộc nào đó, ví dụ

$$\|\mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| \Rightarrow \min$$

với \mathbf{L} là một ma trận cân bằng đã chọn và $\bar{\mathbf{x}}$ là một thông tin cho trước về nghiệm của phương đã cho (nếu không có thông tin gì ta cho $\mathbf{x}^0 = 0$), ta sẽ được một nghiệm riêng khác của phương trình không thuần nhất. Trong trường hợp cuối ta sẽ được

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}' - \mathbf{V}_r (\mathbf{L}\mathbf{V}_r)^+ \mathbf{L}(\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{V}_r (\mathbf{L}\mathbf{V}_r)^+ \mathbf{L}\bar{\mathbf{x}} + [\mathbf{I} - \mathbf{V}_r (\mathbf{L}\mathbf{V}_r)^+ \mathbf{L}]\mathbf{x}'.$$

Thực chất đây là nghiệm của bài toán bình phương tối thiểu có ràng buộc dạng phương trình

$$\min\{\|\mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\| : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}, \quad (\text{A2.12})$$

nhưng đồng thời là nghiệm đúng của phương trình không thuần nhất.

Ta chuyển sang tìm nghiệm đã điều chỉnh của phương trình không thuần nhất tổng quát :

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \lambda^2 \mathbf{x}^0 \quad (\text{A2.13})$$

với λ là tham số điều chỉnh Tikhonov. Sử dụng các khai triển

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \sum_{k=1}^r \sigma_k^2 \bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k^T, \mathbf{I} = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k^T \quad (\text{A2.14})$$

ta có

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{I})\mathbf{x} &= \sum_{k=1}^r (\sigma_k^2 + \lambda^2) [\bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k^T] \mathbf{x} + \sum_{k=r+1}^n \lambda^2 [\bar{\mathbf{v}}_k \bar{\mathbf{v}}_k^T] \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \lambda^2 \mathbf{x}^0 = \sum_{k=1}^r \lambda^2 (\bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{b}) \bar{\mathbf{v}}_k + \lambda^2 \mathbf{x}^0. \end{aligned}$$

Do đó

$$\bar{\mathbf{v}}_k^T \mathbf{x} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \sigma_k^2} x_{0k} + \frac{\sigma_k^2}{\lambda^2 + \sigma_k^2} \frac{\bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{b}}{\sigma_k}, k = 1, \dots, r; \bar{\mathbf{v}}_{k'}^T \mathbf{x} = x_{0k'}, k' = r+1, \dots, n$$

hay

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^r \left[\frac{\lambda^2 x_{0k} + \sigma_k (\bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{b})}{\lambda^2 + \sigma_k^2} \right] \bar{\mathbf{v}}_k + \sum_{k'=r+1}^n x_{0k'} \bar{\mathbf{v}}_{k'}. \quad (\text{A2.15})$$

Đây là biểu thức tổng quát của nghiệm đã được điều chỉnh theo Tikhonov. Nếu $\bar{\mathbf{x}} = 0$, thì nghiệm này bằng

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^r \left[\frac{\sigma_k (\bar{\mathbf{u}}_k^T \mathbf{b})}{\lambda^2 + \sigma_k^2} \right] \bar{\mathbf{v}}_k, \quad (\text{A2.16})$$

được xác định ngay cả khi giá trị kỳ dị rất nhỏ. Từ công thức tổng quát nêu trên, ta thấy rằng nếu tham số điều chỉnh chọn quá lớn, nghiệm điều chỉnh tiến đến thông tin cho trước $\bar{\mathbf{x}}$, lúc này về phải đóng vai trò rất nhỏ. Ngược lại nếu tham số điều chỉnh chọn quá nhỏ so với giá trị kỳ dị bé nhất thì ta sẽ nhận được nghiệm chưa điều chỉnh \mathbf{x}' . Vấn đề chọn tham số điều chỉnh làm sao để cân bằng giữa hai trường hợp tới hạn này, nghĩa là không quá lớn nhưng cũng không quá nhỏ. Mức độ lớn của tham số điều chỉnh sẽ được quyết định bởi sai số của đầu vào \mathbf{b} .

PHỤ LỤC III

PHƯƠNG PHÁP ĐIỀU CHỈNH TIKHONOV

Sơ lược về bài toán ngược

Bài toán ngược không chỉ được đặt ra trong khoa học, kỹ thuật mà nó còn thường gặp trong cuộc sống và tất cả các lĩnh vực hoạt động của xã hội. Nội dung của nó có thể tóm lược ngắn gọn theo Tarantola như sau: “*Xác định nguyên nhân, biết hệ quả của nó*”. Bài toán ngược trong khoa học và kỹ thuật đã được đặt ra từ lâu, nhưng do sự phức tạp của nó, người ta buộc phải lý tưởng hóa các điều kiện để giải bài toán. Ví dụ, trong tính toán thực tế người ta ít quan tâm đến tính duy nhất nghiệm bài toán mà thường giả thiết rằng điều kiện tồn tại và duy nhất tự nó được thỏa mãn (do sự tồn tại và duy nhất của thực tế). Nhưng không phải ai cũng hiểu hăng chính bài toán mà chúng ta đặt ra và giải quyết không phải là thực tế, mà đó chỉ là một sự gần đúng rất thô của thực tế khách quan. Bài toán ngược với những đặc tính “ngược” đã góp phần cảnh báo cho các nhà khoa học, kỹ thuật một triết lý đơn giản: nếu không tìm được nghiệm của bài toán thực tế thì cần xem lại việc đặt bài toán.

Bài toán ngược trong cơ học đã tồn tại, được giải quyết và ứng dụng từ sớm. Đó là bài toán xác định lực tác dụng khi biết quỹ đạo chuyển động của nó. Nhưng do nhu cầu thực tế, trong khoa học kỹ thuật nói chung và cơ học nói riêng xuất hiện một bài toán mới: xây dựng mô hình cho một đối tượng đang tồn tại từ các số liệu đo đạc về trạng thái hiện tại của nó. Bài toán này được gọi là bài toán nhận dạng hệ thống (một số tác giả gọi là bài toán đồng nhất hóa). Đây thực chất là một bài toán ngược đúng theo mọi nghĩa, nhưng chưa có phương pháp hữu hiệu nào có thể giải trọn vẹn bài toán phức tạp này. Chúng ta chỉ có thể tìm được những lời giải gần đúng ở chừng mực nào đó mà thôi.

Gần đây trong kỹ thuật, nhu cầu đánh giá trạng thái kỹ thuật của một đối tượng thực tế đang làm việc càng ngày càng trở nên cấp thiết. Lý do là vì rất nhiều tai nạn xảy ra do không biết trước được diễn biến xấu trong trạng thái làm việc của các đối tượng quan trọng. Bài toán đánh giá trạng thái kỹ thuật của một đối tượng đang tồn tại, sau một thời gian nghiên cứu, được phát biểu ở dạng bài toán nhận dạng hệ thống. Do vậy, những phương pháp nghiên cứu bài toán ngược nói chung và bài toán nhận dạng hệ thống nói riêng trở thành công cụ chủ lực để giải bài toán đánh giá trạng thái kỹ thuật.

Giả sử các tham số mô hình của một đối tượng thuộc một không gian \mathbf{M} , tức $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ và tham số quan sát được $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$, ánh xạ $\mathbf{g}: \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{D}$ được gọi là sự tiên đoán (prediction) trạng thái quan sát được. Việc xây dựng ánh xạ \mathbf{g} thực chất là

cốt lõi của việc mô hình hóa. Do mô hình tham số được xác định bằng véc tơ \mathbf{m} , chúng ta gọi tắt \mathbf{m} là một mô hình.

Bài toán cho trước \mathbf{g} và \mathbf{m} cần xác định \mathbf{d} được gọi là bài toán phân tích hay bài toán thuận.

Khi đó, bài toán ngược được định nghĩa là cho trước \mathbf{g} và \mathbf{d} cần phải xác định \mathbf{m} . Nói cách khác bài toán ngược là việc đi tìm một mô hình tham số của một đối tượng từ số liệu đo đạc các tham số quan sát được. Thực chất là việc xây dựng ánh xạ ngược $\mathbf{g}^{-1}: \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{M}$.

Ví dụ 1.1: Giả sử từ một trung tâm truyền thông phát ra một tín hiệu $\mathbf{u}(t)$ vào không gian và tại một địa điểm khác thu nhận được một tín hiệu $\mathbf{v}(t)$. Biết rằng sự làm việc của các thiết bị thu phát được mô tả bằng ánh xạ

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \int_0^t \mathbf{R}(t-s)\mathbf{u}(s)ds = \mathbf{v}(t). \quad (\text{A3.1})$$

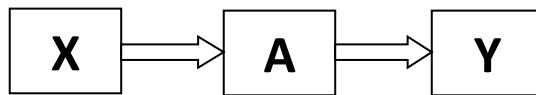
Vấn đề đặt ra là phải khôi phục lại tín hiệu phát ra ban đầu.

Ví dụ 1.2. Xác định khuyết tật trong một vật thể bằng sóng âm đo được tại một số vị trí nào đó, biết rằng sự truyền sóng âm trong một môi trường được mô tả bằng phương trình

$$\text{divgrad}\varphi(\mathbf{x}) + k^2\varphi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{s}_0, \mathbf{r}_0\}.$$

Cơ sở toán học chặt chẽ nhất hiện nay để giải bài toán ngược nêu trên chính là định lý về sự tồn tại ánh xạ ngược. Hiển nhiên là không phải khi nào cũng tồn tại ánh xạ ngược, đặc biệt là có sự sai khác giữa mô hình và thực tế, giữa đo đạc và tính toán. Vì vậy, bài toán ngược nêu trên, mặc dù có rất nhiều ứng dụng trong thực tế, cho đến nay vẫn còn là vấn đề rất khó, ngay cả đối với các nhà toán học.

Trong cơ học, các bài toán được đặt ra như sau. Bất kỳ một đối tượng nào cũng có thể được biểu diễn qua sơ đồ dưới đây.



Sơ đồ hệ thống của một đối tượng.

Trong sơ đồ trên, \mathbf{X} là tác động ngoài, đồng thời được hiểu là đầu vào (input) của hệ thống, \mathbf{Y} là ứng xử của đối tượng hay đầu ra của hệ thống (output) và \mathbf{A} là mô hình của hệ thống được mô tả bằng các tham số mô hình và mối liên hệ giữa tác động và ứng xử của đối tượng.

Bài toán phân tích hay còn gọi là bài toán thuận cơ bản của hệ thống nêu trên được đặt ra là tính toán \mathbf{Y} biết \mathbf{X} và \mathbf{A} . Bài toán này nói chung được mô tả bằng phương trình

$$\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (\text{A3.2})$$

trong đó \mathbf{A} là một toán tử, \mathbf{U} là ứng xử và \mathbf{P} là tác động ngoài. Bài toán này rất thông dụng trong cơ học từ cổ xưa đến ngày nay. Bài toán ngược cổ điển của cơ học, được gọi là bài toán xác định lực tác lên hệ, là tìm \mathbf{X} nếu biết \mathbf{A} và \mathbf{Y} . Đây là bài toán cơ bản của việc điều khiển một đối tượng theo một mục tiêu cho trước. Ví dụ, ta muốn đưa một vệ tinh lên quỹ đạo cho trước, cần phải xác định các cơ cấu điều khiển tạo ra các lực tác dụng lên hệ để vệ tinh chuyển động theo quỹ đạo mong muốn.

Bài toán nhận dạng hệ thống được đặt ra như là việc xây dựng mô hình cho một đối tượng đang tồn tại từ các số liệu đo đạc trên đối tượng: xác định \mathbf{A} , biết \mathbf{X} và \mathbf{Y} . Nếu coi \mathbf{X} và \mathbf{Y} là các tham số quan sát được và hệ thống \mathbf{A} được mô tả bằng một tập các tham số mô hình \mathbf{m} thì bài toán nhận dạng hệ thống chính là bài toán ngược ban đầu đã định nghĩa ở trên. Bài toán nhận dạng hệ thống hiện đang được áp dụng rộng rãi trong thực nghiệm, điều khiển, cơ học và rất nhiều ngành kỹ thuật.

Một ví dụ quan trọng của bài toán ngược trong cơ học là bài toán xác định ma trận biết các trị riêng của nó Gladwell [13], có nội dung như sau: Giả sử một hệ cơ học được xác định bằng hai ma trận độ cứng và khối lượng \mathbf{K} , \mathbf{M} và các giá trị riêng λ (tần số riêng), dạng riêng của hệ thỏa mãn phương trình

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{y} = 0 \quad (\text{A3.3})$$

và trị riêng thỏa mãn phương trình đặc trưng

$$f(\mathbf{K}, \mathbf{M}, \lambda) \equiv \det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = 0. \quad (\text{A3.4})$$

Nếu cho trước các trị riêng $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ thì các ma trận độ cứng và khối lượng được xác định từ phương trình

$$f(\mathbf{K}, \mathbf{M}, \lambda_j) = 0, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A3.5})$$

Rõ ràng ta chỉ có n phương trình đại số siêu việt để xác định $2n^2$ ẩn số là các thành phần của hai ma trận độ cứng và khối lượng. Để giải bài toán này chúng ta cần thêm thông tin về các ma trận \mathbf{K} , \mathbf{M} , ví dụ như tính đối xứng, xác định dương hay ma trận đường chéo. Các điều kiện này cho phép ta giảm bớt ẩn số cần tìm.

Như vậy, có thể hiểu một cách tổng quát, bài toán ngược là việc xây dựng mô hình cho một đối tượng từ các số liệu đo đạc. Trong bài toán này có hai yếu tố quan trọng, đó là mô hình và số liệu đo đạc. Cả hai yếu tố này không thể xác định một cách chính xác so với thực tế. Do đó các bài toán ngược nêu trên đều có những đặc tính sau đây:

Rất nhạy cảm với sai số mô hình và đo đạc. Nghĩa là sự thay đổi nhỏ của sai số cũng có thể dẫn đến thay đổi lớn trong kết quả giải bài toán (tính không

ổn định đối với sai số). Thêm vào đó là sai số tính toán, nhiều khi cũng tạo nên sự khó khăn trong khi giải bài toán ngược.

Nói chung các bài toán ngược không có hoặc không duy nhất nghiệm. Điều này xảy ra là do sai số nêu trên cộng với sự thiếu thông tin cho trước. Các số liệu thu thập được không bao giờ là đầy đủ so với thực tế tồn tại khách quan rất phức tạp của một đối tượng.

Phương pháp điều chỉnh Tikhonov

Trong nhiều trường hợp, bài toán ngược dẫn đến việc giải phương trình Tikhonov và Arnesin

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (\text{A3.6})$$

trong đó ma trận \mathbf{A} là bất kỳ (có thể không vuông hoặc suy biến) và \mathbf{b} là véc tơ chỉ được biết một cách gần đúng so với giá trị chính xác $\bar{\mathbf{b}}$.

Lời giải gần đúng đầu tiên của bài toán này chính là lời giải bình phương tối thiểu \mathbf{x}_{LS} , được xác định bằng các định lý dưới đây:

Định lý 1. Nghiệm bình phương tối thiểu

$$\mathbf{x}_{LS} = \arg \min_x \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$$

tồn tại khi và chỉ khi phương trình

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \quad (\text{A3.7})$$

có nghiệm và đó chính là nghiệm bình phương tối thiểu cần tìm.

Nói chung, nghiệm này được biểu diễn qua ma trận tựa nghịch đảo Moore-Penrose, ký hiệu là

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T,$$

như sau

$$\mathbf{x}_{LS} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}. \quad (\text{A3.8})$$

Tuy nhiên, lời giải này cũng có khi không tồn tại do ma trận $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ vẫn có thể suy biến hoặc gần suy biến (có trị riêng rất nhỏ). Khi đó nghiệm (2.8) rất nhạy cảm với sai số của véc tơ vế phải \mathbf{b} .

Chính vì thế, A.N. Tikhonov đã đề xuất một giải pháp điều chỉnh nghiệm gần đúng này bằng cách tìm nghiệm bình phương tối thiểu của bài toán

$$\mathbf{x}_{RLS} = \arg \min_x \{ \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \alpha \|\mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)\|^2 \}, \quad (\text{A3.9})$$

với α, L, \mathbf{x}^0 lần lượt là tham số điều chỉnh dương, ma trận điều chỉnh và một tiên đoán nào đó về nghiệm của phương trình ban đầu. Trong đó tham số và ma trận điều chỉnh sẽ được chọn để nghiệm đã cho luôn tồn tại duy nhất và ổn định đối với sai số của véc tơ vế phải (thay đổi nhỏ khi véc tơ vế phải thay đổi nhỏ). Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán đã được điều chỉnh được khẳng định bằng định lý dưới đây:

Định lý 2. với $\alpha > 0$ nghiệm bình phương tối thiểu đã được điều chỉnh là nghiệm của phương trình

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L}) \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} + \alpha \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{x}^0. \quad (\text{A3.10})$$

Dễ dàng nhận thấy với $\alpha \rightarrow 0$ thì nghiệm đã được điều chỉnh $\mathbf{x}_{RLS} \rightarrow \mathbf{x}_{LS}$. Hơn nữa định lý 2 mới chỉ khẳng định được có thể chọn được các tham số α , L , \mathbf{x}^0 để tồn tại và duy nhất nghiệm đã được điều chỉnh. Sự ổn định của nghiệm đã điều chỉnh theo sai số của vế phải được minh chứng bằng định lý sau:

Định lý 3. Nếu thoả mãn điều kiện

$$\|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\| < \delta = \|\mathbf{A} \mathbf{x}_{RLS} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{b}\|, \quad (\text{A3.11})$$

Thì

$$\|\mathbf{x}_{RLS} - \mathbf{x}_e\| \leq 2\sqrt{\delta \|\mathbf{z}\|}, \quad (\text{A3.12})$$

trong đó

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{z} = \mathbf{b} \quad (\text{A3.13})$$

và \mathbf{x}_e là nghiệm chính xác của phương trình đã cho

$$\mathbf{A} \mathbf{x}_e = \mathbf{b}. \quad (\text{A3.14})$$

Định lý 3 cho thấy nếu biết được mức độ nhiễu của vế phải là δ , thì có thể chọn tham số điều chỉnh từ phương trình $\delta = \|\mathbf{A} \mathbf{x}_{RLS} - \mathbf{b}\|$ để nghiệm đã được điều chỉnh sẽ tiến đến nghiệm chính xác khi nhiễu tiến đến 0. Như vậy, Định lý 3 đã chỉ ra rằng có thể chọn tham số điều chỉnh α để nghiệm điều chỉnh ổn định đối với nhiễu vế phải. Hơn thế nữa, định lý này còn cho ta phương trình để chọn tham số điều chỉnh mà trong các tài liệu được gọi là nguyên lý Morozov (Morosov's Discrepancy Principle). Vấn đề còn lại để đạt được một nghiệm ổn định với nhiễu là giải phương trình

$$\|\mathbf{A} \mathbf{x}_{RLS}(\alpha) - \mathbf{b}\| = \delta \quad (\text{A3.51})$$

đối với α . Định lý sau đây chứng minh rằng tham số điều chỉnh đó luôn tồn tại và có thể tìm được bằng các thuật toán cổ điển.

Định lý 4. Hàm số

$$\varphi(\mu) = \|\mathbf{A} \mathbf{x}_{RLS}(\alpha) - \mathbf{b}\|, \mu = 1/\alpha, \quad (\text{A3.16})$$

bằng

$$\varphi(\mu) = \mathbf{b}^T (\mu \mathbf{A} \mathbf{A}^T + \mathbf{I})^{-2} \mathbf{b} \quad (\text{A3.17})$$

là một hàm giảm và lồi với $\mu > 0$ và phương trình $\varphi(\mu) = \tau$ với τ bất kỳ thoả mãn

$$\|\mathbf{b}_0\|^2 < \tau < \|\mathbf{b}\|^2, \quad (\text{A3.18})$$

trong đó \mathbf{b}_0 là hình chiếu của \mathbf{b} lên tập không của ma trận $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ có một nghiệm hữu hạn duy nhất $0 < \hat{\mu} < \infty$.

Ngoài việc chứng minh tồn tại tham số điều chỉnh tối ưu, định lý này còn cho phép ta xác định được phương trình hiện đối với tham số điều chỉnh có thể giải được bằng phương pháp đơn giản nhất. Tuy nhiên vấn đề lại là chọn τ như thế nào. Nếu biết sai số của vế phải

$$\varepsilon = \|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}\| \quad (\text{A3.19})$$

thì ta có thể chọn ngay $\tau = \eta^2 \varepsilon^2$ với $\eta > 1$ chọn từ điều kiện

$$\|\mathbf{b}_0\| < \eta \varepsilon < \|\mathbf{b}\|. \quad (\text{A3.20})$$

Nhưng nếu sai số này không biết thì ta có thể chọn τ tuân thủ bất đẳng thức

$$\|\mathbf{b}_0\|^2 < \tau < \|\mathbf{b}\|^2. \quad (\text{A3.21})$$

Trên đây là cơ sở lý thuyết của việc điều chỉnh Tikhonov. Nhưng trong thực tế, người ta không chỉ dừng lại ở lý thuyết tổng quát mà cần phải tìm được biểu thức hiện của nghiệm đã điều chỉnh. Phương pháp khai triển giá trị kỳ dị (Singular Value Decomposition – SVD) được trình bày trong phụ lục II

PHỤ LỤC IV

MÔ ĐUN CHƯƠNG TRÌNH TÍNH BẰNG MATLAB

```

function bar_XX1_2016
E = 7.2e10; ro = 2800; nu = 0.35;
b = 0.006; h = 0.023; A = b*h;
L = 0.235;
clc;
ah = 0.5*[1 1 1];
ec = [0.2 0.4 0.6];
opt = 2; % 1- ngam - tu do, 2 - ngam - ngam, 3. Tu do - Tu do
par = [L h nu];
y = mainFres(5,par,0*ah,ec,opt);
vpa(y,10)
n =1
mainFre_ah(n,par,ec,y(n,1),opt)
return
end
%-----
% Moi quan he giua tan so va do sau vet nut (1 vet nut)
function mainFre_ah(n,par,ec,lambda0,opt)
% L = par(1); h = par(2); nu = par(3); e1 = par(4); lambda0 =par(5);
ne = 100;
da = 0.5/ne;
ahi =0:da:0.5;
y =zeros(ne,1);
for i=1:ne+1
    ah = ahi(i)*[1 1 1];
    fre = mainFres(n,par,ah,ec,opt);
    y(i,1) = fre(n,1)/lambda0;
end
figure(3)
hold on
    plot(ahi',y,'k');
    box on
hold off
return
end
%-----
% Mo dun tinh tan so rieng
function lambda= mainFres(n,par,ah,ec,opt)
lambda = zeros(n,1);
x0 = 0.0;
for i = 1:n
    a = x0 + 0.1; % Gia tri cua ban dau
    d_ab = 0.1; % Buoc tang khoang chia 0.1 khong tnh duoc 0.55
    f1 =1.0; f2 = 1.0; % Chon gia tri ban dau
    % Tim khoang co nghiem tu dong
    while f1*f2>0,
        b = a + d_ab;
        f1 = funcd(a,par,ah,ec,opt)*eps;
        f2 = funcd(b,par,ah,ec,opt)*eps;
        a = b;
    end
    a = b - d_ab;
    % Tim nghiem bang phuong phap day cung or bisection
    lambda(i,1) = rtbis(a,b,par,ah,ec,opt);
    x0 = lambda(i,1);
end
return
end

```

```

%-----
function d = funcd(lambda,par,ah,ec,opt)

L = par(1); h = par(2); nu = par(3);
nc = length(ec);
for i=1:nc
    gama(i) = func_Ic(nu,h,L,ah(i));
end

switch(opt)
    case 1 % ngam tu do
        alpha0 = 1; alpha1 = 0;
        beta0 = 0; beta1 = 1;
    case 2 % Ngam - Ngam
        alpha0 = 1; alpha1 = 1;
        beta0 = 0; beta1 = 0;
    case 3 % Tu do - tu do
        alpha0 = 0; alpha1 = 0;
        beta0 = 1; beta1 = 1;
    otherwise
end

d0 = (alpha0*alpha1+lambda^2*beta0*beta1)*sin(lambda)+...
    lambda*(alpha0*beta1-alpha1*beta0)*cos(lambda);

d1 = func_d1(lambda,ec,opt);
tong = 0;
for i =1:nc
    tong = tong + gama(i)*d1(i);
end
d = d0 + lambda*tong;

return
end

%-----
function d1 = func_d1(lambda,e1,opt)

nc = length(e1);
switch(opt)
    case 1 % ngam tu do
        alpha0 = 1; alpha1 = 0;
        beta0 = 0; beta1 = 1;
    case 2 % Ngam - Ngam
        alpha0 = 1; alpha1 = 1;
        beta0 = 0; beta1 = 0;
    case 3 % Tu do - tu do
        alpha0 = 0; alpha1 = 0;
        beta0 = 1; beta1 = 1;
    otherwise
end
for i=1:nc
    d1(i) = (alpha0*cos(lambda*e1(i))+lambda*beta0*sin(lambda*e1(i)))*...
        (alpha1*cos(lambda*(1-e1(i)))-lambda*beta1*sin(lambda*(1-e1(i))));
end
return
end

%-----
function Ic = func_Ic(nu, h,L, ah)
% Vet nut hai canh R. Ruotolo (2004)
% alpha = 0.7314*ah^8-1.0368*ah^7+0.5803*ah^6+1.2055*ah^5-1.0368*ah^4+...
%         0.2381*ah^3+0.9852*ah^2;

```

```

% Ic = 2*h*(1-nu^2)*alpha;
alpha = 0.6272*ah^2 - 0.17248*ah^3 + 5.92134*ah^4 - 10.7054*ah^5 + ...
        31.5685*ah^6 - 67.47*ah^7+139.123*ah^8-146.682*ah^9+92.3552*ah^10;
Ic = 2*pi*h*(1-nu^2)*alpha/L;
end
%-----
% mo dun tim nghiem bang phuong phap chia doi khoang cach
function x = rtbis(x1,x2,par,ah,ec,opt)
% Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software .
jmax = 50; xacc = eps;
f = funcd(x1,par,ah,ec,opt);
fmind = funcd(x2,par,ah,ec,opt);
if f*fmind>=0
    disp('Root must be bracked for bisection in rtbis');
    x = x2 + db;
    return;
end
if f < 0
    x = x1;
    dx = x2-x1;
else
    x = x2;
    dx = x1-x2;
end

for j =1:jmax
    dx = dx*0.5;
    xmid = x + dx;

    fmid = funcd(xmid,par,ah,ec,opt);
    if fmid <=0
        x = xmid;
    end

    if (abs(dx)<xacc || abs(fmid)==0.0)

        break;
    end
end

return
end
%-----Ket thuc xx1-----
function bar_XX2_2016
E = 7.2e10; ro = 2800; nu = 0.35;
b = 0.006; h = 0.023; A = b*h;
L = 0.235;
% clc;

ah = 0.5*[1 1 ];
ec = [0.3 0.7];
opt = 2; % 1- ngam - tu do, 2 - ngam - ngam, 3. Tu do - Tu do
par = [L h nu];
y = mainFres(5,par,ah,ec,opt);
vpa(y,10)
n = 1
mainFre_ah(n,par,ec,y(n,1),opt)

return
end
%-----
% Moi quan he giua tan so va do sau vet nut (1 vet nut)

```

```

function mainFre_ah(n,par,ec,lambda0,opt)
% L = par(1); h = par(2); nu = par(3); e1 = par(4); lambda0 =par(5);
ne = 100;
da = 0.5/ne;
ahi =0:da:0.5;
y =zeros(ne,1);
for i=1:ne+1
    ah = ahi(i)*[1 1 1];
    fre = mainFres(n,par,ah,ec,opt);
    y(i,1) = fre(n,1)/lambda0;
end
figure(3)
hold on
    plot(ahi',y,'k');
    box on
hold off
return
end
%-----
% Mo dun tinh tan so rieng
function lambda= mainFres(n,par,ah,ec,opt)
lambda = zeros(n,1);
x0 = 0.0;
    for i = 1:n
        a = x0 + 0.1; % Gia tri cua ban dau
        d_ab = 0.1; % Buoc tang khoang chia 0.1 khong tnh duoc 0.55
        f1 =1.0; f2 = 1.0; % Chon gia tri ban dau
        % Tim khoang co nghiem tu dong
        while f1*f2>0,
            b = a + d_ab;
            f1 = funcd(a,par,ah,ec,opt)*eps;
            f2 = funcd(b,par,ah,ec,opt)*eps;
            a = b;
        end
        a = b - d_ab;
        % Tim nghiem bang phuong phap day cung or bisection
        lambda(i,1) = rtbis(a,b,par,ah,ec,opt);
        x0 = lambda(i,1);
    end
return
end
%-----

function d = funcd(lambda,par,ah,ec,opt)

L = par(1); h = par(2); nu = par(3);
nc = length(ec);
for i=1:nc
    gama(i) = func_Ic(nu,h,L,ah(i));
end

switch(opt)
    case 1 % ngam tu do
        alpha0 = 1; alpha1 = 0;
        beta0 = 0; beta1 = 1;
    case 2 % Ngam - Ngam
        alpha0 = 1; alpha1 = 1;
        beta0 = 0; beta1 = 0;
    case 3 % Tu do - tu do
        alpha0 = 0; alpha1 = 0;
        beta0 = 1; beta1 = 1;
    otherwise
end
end

```

```

d0 = (alpha0*alpha1+lambda^2*beta0*beta1)*sin(lambda)+...
      lambda*(alpha0*beta1-alpha1*beta0)*cos(lambda);

d1 = func_d1(lambda,ec,opt);
tong = 0;
for i =1:nc
    tong = tong + gama(i)*d1(i);
end
d2 = func_d2(lambda,par,ah,ec,opt);

d = d0 + lambda*tong + d2;

return
end

%-----
function d1 = func_d1(lambda,e1,opt)

nc = length(e1);
switch(opt)
    case 1 % ngam tu do
        alpha0 = 1; alpha1 = 0;
        beta0 = 0; beta1 = 1;
    case 2 % Ngam - Ngam
        alpha0 = 1; alpha1 = 1;
        beta0 = 0; beta1 = 0;
    case 3 % Tu do - tu do
        alpha0 = 0; alpha1 = 0;
        beta0 = 1; beta1 = 1;
    otherwise
end
for i=1:nc
    d1(i) =
(alpha0*cos(lambda*e1(i))+lambda*beta0*sin(lambda*e1(i)))*...
        (alpha1*cos(lambda*(1-e1(i)))-lambda*beta1*sin(lambda*(1-
e1(i)))));
end
return
end

%-----
function d2 = func_d2(lambda,par,ah,ec,opt)
L = par(1); h = par(2); nu = par(3);
nc = length(ec);
for i=1:nc
    gama(i) = func_Ic(nu,h,L,ah(i));
end

tong = 0;
for j = 2:nc
    for k = 1:j-1
        tong =tong + func_H1(lambda,1-ec(j),opt)*sin(lambda*(ec(j)-
ec(k)))*...
            func_H0(lambda,ec(k),opt)*gama(j)*gama(k);
    end

end

d2 = -lambda^2*tong;
return
end
%-----

```

```

function H1 = func_H1(lambda,x, opt)

    switch(opt)
        case 1 % ngam tu do
            alpha1 = 0; beta1 = 1;
        case 2 % Ngam - Ngam
            alpha1 = 1; beta1 = 0;
        case 3 % Tu do - tu do
            alpha1 = 0; beta1 = 1;
        otherwise
    end
    H1 = alpha1*cos(lambda*x)-lambda*beta1*sin(lambda*x);
return
end
%-----
function H0 = func_H0(lambda,x, opt)

    switch(opt)
        case 1 % ngam tu do
            alpha0 = 1; beta0 = 0;
        case 2 % Ngam - Ngam
            alpha0 = 1; beta0 = 0;
        case 3 % Tu do - tu do
            alpha0 = 0; beta0 = 1;
        otherwise
    end
    H0 = alpha0*cos(lambda*x)+lambda*beta0*sin(lambda*x);
return
end
%-----Ket thuc xap xi 2-----
function bar_XX3_2016
E = 7.2e10; ro = 2800; nu = 0.35;
b = 0.006; h = 0.023; A = b*h;
L = 0.235;
% clc;

ah = 0.5*[1 ];
ec = [0.3 ];
opt = 2; % 1- ngam - tu do, 2 - ngam - ngam, 3. Tu do - Tu do
par = [L h nu];
y = mainFres(5,par,ah,ec,opt);
vpa(y,10)
%
% n =1
% mainFre_ah(n,par,ec,y(n,1),opt)

return
end
%-----
% Moi quan he giua tan so va do sau vet nut (1 vet nut)
function mainFre_ah(n,par,ec,lambda0,opt)
% L = par(1); h = par(2); nu = par(3); e1 = par(4); lambda0 =par(5);
ne = 100;
da = 0.5/ne;
ahi =0:da:0.5;
y =zeros(ne,1);
for i=1:ne+1
    ah = ahi(i)*[1 1 1];
    fre = mainFres(n,par,ah,ec,opt);
    y(i,1) = fre(n,1)/lambda0;
end
figure(3)
hold on

```

```

        plot(ahi',y,'k');
        box on
    hold off
return
end
%-----
% Mo dun tinh tan so rieng
function lambda= mainFres(n,par,ah,ec,opt)
    lambda = zeros(n,1);
    x0 = 0.0;
    for i = 1:n
        a = x0 + 0.1; % Gia tri cua ban dau
        d_ab = 0.1; % Buoc tang khoang chia 0.1 khong tnh duoc 0.55
        f1 = 1.0; f2 = 1.0; % Chon gia tri ban dau
        % Tim khoang co nghiem tu dong
        while f1*f2>0,
            b = a + d_ab;
            f1 = funcd(a,par,ah,ec,opt)*eps;
            f2 = funcd(b,par,ah,ec,opt)*eps;
            a = b;
        end
        a = b - d_ab;
        % Tim nghiem bang phuong phap day cung or bisection
        lambda(i,1) = rtbis(a,b,par,ah,ec,opt);
        x0 = lambda(i,1);
    end
return
end
%-----

function d = funcd(lambda,par,ah,ec,opt)

    L = par(1); h = par(2); nu = par(3);
    nc = length(ec);
    for i=1:nc
        gama(i) = func_Ic(nu,h,L,ah(i));
    end

    switch(opt)
        case 1 % ngam tu do
            alpha0 = 1; alpha1 = 0;
            beta0 = 0; beta1 = 1;
        case 2 % Ngam - Ngam
            alpha0 = 1; alpha1 = 1;
            beta0 = 0; beta1 = 0;
        case 3 % Tu do - tu do
            alpha0 = 0; alpha1 = 0;
            beta0 = 1; beta1 = 1;
        otherwise
    end

    d0 = (alpha0*alpha1+lambda^2*beta0*beta1)*sin(lambda)+...
        lambda*(alpha0*beta1-alpha1*beta0)*cos(lambda);

    d1 = func_d1(lambda,ec,opt);
    tong = 0;
    for i =1:nc
        tong = tong + gama(i)*d1(i);
    end
    d2 = func_d2(lambda,par,ah,ec,opt);
    d3 = func_d3(lambda,par,ah,ec,opt);
    d = d0 + lambda*tong + d2 + d3;

```



```

return
end

%-----
function d1 = func_d1(lambda,e1,opt)

    nc = length(e1);
    switch(opt)
        case 1 % ngam tu do
            alpha0 = 1; alpha1 = 0;
            beta0 = 0; beta1 = 1;
        case 2 % Ngam - Ngam
            alpha0 = 1; alpha1 = 1;
            beta0 = 0; beta1 = 0;
        case 3 % Tu do - tu do
            alpha0 = 0; alpha1 = 0;
            beta0 = 1; beta1 = 1;
        otherwise
    end
    for i=1:nc
        d1(i) =
(alpha0*cos(lambda*e1(i))+lambda*beta0*sin(lambda*e1(i)))*...
        (alpha1*cos(lambda*(1-e1(i)))-lambda*beta1*sin(lambda*(1-
e1(i)))));
    end
return
end

%-----
function d2 = func_d2(lambda,par,ah,ec,opt)
    L = par(1); h = par(2); nu = par(3);
    nc = length(ec);
    for i=1:nc
        gama(i) = func_Ic(nu,h,L,ah(i));
    end

    tong = 0;
    for j = 2:nc
        for k = 1:j-1
            tong =tong + func_H1(lambda,1-ec(j),opt)*sin(lambda*(ec(j)-
ec(k)))*...
                func_H0(lambda,ec(k),opt)*gama(j)*gama(k);
        end

    end

    d2 = -lambda^2*tong;
return
end

%-----
function d3 = func_d3(lambda,par,ah,ec,opt)
    L = par(1); h = par(2); nu = par(3);
    nc = length(ec);
    for i=1:nc
        gama(i) = func_Ic(nu,h,L,ah(i));
    end

    tong = 0;
    for j = 3:nc
        for k = 2:j-1
            for r = 1:k-1
                tong = tong + func_H1(lambda,1-ec(j),opt)*...

```

```

sin(lambda*(ec(j)-ec(k)))*...
sin(lambda*(ec(k)-ec(r)))*...
func_H0(lambda,ec(r),opt)*gama(j)*gama(k)*gama(r);
    end
end

end

d3 = lambda^3*tong;
return
end
%-----
function H1 = func_H1(lambda,x, opt)

switch(opt)
case 1 % ngam tu do
    alpha1 = 0; beta1 = 1;
case 2 % Ngam - Ngam
    alpha1 = 1; beta1 = 0;
case 3 % Tu do - tu do
    alpha1 = 0; beta1 = 1;
otherwise
end
H1 = alpha1*cos(lambda*x)-lambda*beta1*sin(lambda*x);
return
end
%-----
function H0 = func_H0(lambda,x, opt)

switch(opt)
case 1 % ngam tu do
    alpha0 = 1; beta0 = 0;
case 2 % Ngam - Ngam
    alpha0 = 1; beta0 = 0;
case 3 % Tu do - tu do
    alpha0 = 0; beta0 = 1;
otherwise
end
H0 = alpha0*cos(lambda*x)+lambda*beta0*sin(lambda*x);
return
end

%-----
function Ic = func_Ic(nu, h,L, ah)
% Vet nut hai canh R. Ruotolo (2004)
% alpha = 0.7314*ah^8-1.0368*ah^7+0.5803*ah^6+1.2055*ah^5-1.0368*ah^4+...
% 0.2381*ah^3+0.9852*ah^2;
% Ic = 2*h*(1-nu^2)*alpha;
alpha = 0.6272*ah^2 - 0.17248*ah^3 + 5.92134*ah^4 - 10.7054*ah^5 + ...
31.5685*ah^6 - 67.47*ah^7+139.123*ah^8-146.682*ah^9+92.3552*ah^10;
Ic = 2*pi*h*(1-nu^2)*alpha/L;
end
%-----
% mo dun tim nghiem bang phuong phap chia doi khoang cach
function x = rtbis(x1,x2,par,ah,ec,opt)
% Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software .
jmax = 50; xacc = eps;
f = funcd(x1,par,ah,ec,opt);
fmind = funcd(x2,par,ah,ec,opt);
if f*fmind>=0
    disp('Root must be bracked for bisection in rtbis');
    x = x2 + db;
return;

```

```

end
if f < 0
    x = x1;
    dx = x2-x1;
else
    x = x2;
    dx = x1-x2;
end

for j =1:jmax
    dx = dx*0.5;
    xmid = x + dx;

    fmid = funcd(xmid,par,ah,ec,opt);
    if fmid <=0
        x = xmid;
    end

    if (abs(dx)<xacc || abs(fmid)==0.0)

        break;
    end
end

return
end
%-----Ket thuc xap xi 3-----

function Fre_Khue2016
clc;
E = 7.2e10; ro = 2800; nu = 0.35;
b = 0.006; h = 0.023; A = b*h;
L = 0.235;
% 1- Ngam - tu do
% lambda0 = [1.570796327
%           4.71238898
%           7.853981634
%           10.99557429
%           14.13716694];
% 2 - ngam - ngam
% lambda0 = [3.141592654
%           6.283185307
%           9.424777961
%           12.56637061
%           15.70796327];
% 3. Tu do - Tu do
% lambda0 = [3.141592654
%           6.283185307
%           9.424777961
%           12.56637061
%           15.70796327];

% Thong so vet nut
ah = 0.5;
e1 = 1;
opt = 3; % 1- ngam - tu do, 2 - ngam - ngam, 3. Tu do - Tu do
par = [L h nu ah e1];
y = mainFre(5,par,opt);
vpa(y,10)
%-----
% Moi quan he tan so va vi tri vet nut (1 vet nut) Fig 3.1-3.3
% % n = 3;

```

```

% % par0 = [L h nu ah, lambda0(n)];
% % mainFre_ex(n,par0,opt)
% % xlabel('e');
% % ylabel('\lambda_3/\lambda_0_3');
% % grid on
% % box on
% -----
% Moi quan he giua tan so va do sau vet nut (1 vet nut)
% % n = 2;
% %     par0 = [L h nu e1, lambda0(n)];
% %     mainFre_ah(n,par0,opt)
% %     xlabel('a/h');
% % %     ylabel('\lambda_1/\lambda_0_1');
% % %     grid on
% %     box on
% -----
% Tinh FRF
x0 = 1; % diem dat luc
x = 0; % diem do
main_FRF(x,x0,par,E,ro,opt)

% -----
% lambda = y(1,1)
% mainMode(1,lambda,par,opt)
return
end
% -----
% Ham tinh dap ung tan so FRF
function main_FRF(x,x0,par,E,ro,opt)
n = 1024;
lambda_s = 1;
lambda_e = 8;
dlam = (lambda_e-lambda_s)/n;
lambdai = lambda_s:dlam:lambda_e;

for i =1:n+1
    lambda = lambdai(i);
    FRF(i) = func_FRF(x,x0,lambda,par,opt);
end
c = sqrt(E/ro);
hold on
    plot(lambdai',abs(FRF)/c,'b');
hold off

return
end

% -----
function FRF = func_FRF(x,x0,lambda,par,opt)

L = par(1); h = par(2); nu = par(3); ah = par(4); e1 = par(5);

switch(opt)
    case 1 % ngam tu do
        alpha1 = 0; beta1 = 1;
    case 2 % Ngam - Ngam
        alpha1 = 1; beta1 = 0;
    case 3 % Tu do - tu do
        alpha1 = 0; beta1 = 1;
    otherwise
end
gama = func_Ic(nu,h,L,ah);

```

```

hf = func_h(1-x0,lambda);
hfp =func_hp(1-x0,lambda);
L0 = funcL0(x,lambda,opt);
Kf = funcK(lambda,x-e1);

ts = (alpha1*hf + beta1*hfp)*(L0 + lambda*gama*cos(lambda*e1)*Kf);

L01 = funcL0(1,lambda,opt);
L0p = funcL0p(1,lambda,opt);
s = funcK(lambda,1-e1);
sp = funcKp(lambda,1-e1);

ms = alpha1*L01 + beta1*L0p +...
      lambda*gama*cos(lambda*e1)*(alpha1*s + beta1*sp);
FRF = func_h(x-x0,lambda) - ts/ms;
return
end
%-----
% Mo dun tinh tan so rieng
function lambda= mainFre(n,par,opt)
lambda = zeros(n,1);
x0 = 0.0;
    for i = 1:n
        a = x0 + 0.1; % Gia tri cua ban dau
        d_ab = 0.1; % Buoc tang khoang chia 0.1 khong tnh duoc 0.55
        f1 =1.0; f2 = 1.0; % Chon gia tri ban dau
        % Tim khoang co nghiem tu dong
        while f1*f2>0,
            b = a + d_ab;
            f1 = funcd0(a,par,opt)*eps;
            f2 = funcd0(b,par,opt)*eps;
            a = b;
        end
        a = b - d_ab;
        % Tim nghiem bang phuong phap day cung or bisection
        lambda(i,1) = rtbis(a,b,par,opt);
        x0 = lambda(i,1);
    end
return
end
%-----
% Moi quan he tan so va vi tri vet nut (1 vet nut)
function mainFre_ex(n,par0,opt)
L = par0(1); h = par0(2); nu = par0(3); ah = par0(4); lambda0 =par0(5);
ne = 100;
de =1/ne;
ex =0:de:1;
y =zeros(ne,1);
for i=1:ne+1
    e1 = ex(i);
    par = [L h nu ah e1];
    fre = mainFre(n,par,opt);
    y(i,1) = fre(n,1)/lambda0;
end
figure(2)
hold on
    plot(ex',y,'k');
hold off

return
end
%-----

```

```

% Moi quan he giua tan so va do sau vet nut (1 vet nut)
function mainFre_ah(n,par0,opt)
    L = par0(1); h = par0(2); nu = par0(3); e1 = par0(4); lambda0 =par0(5);
    ne = 100;
    da = 0.5/ne;
    ahi =0:da:0.5;
    y =zeros(ne,1);
    for i=1:ne+1
        ah = ahi(i);
        par = [L h nu ah e1];
        fre = mainFre(n,par,opt);
        y(i,1) = fre(n,1)/lambda0;
    end
    figure(3)
    hold on
        plot(ahi',y,'k');
    hold off
return
end
%-----
function mainMode (n, lambda, par, opt)
% Tinh mu
    L = par(1); h = par(2); nu = par(3); ah = par(4); e1 = par(5);
    gama = func_Ic(nu, h,L, ah);
    L0p = funcL0p(lambda,e1,opt);
    mul = gama*L0p;
    nx =100;
    y= zeros (nx,1);
    dx= 1/nx;
    x=0:dx:1;
    for i=1:nx+1
        L0 = funcL0(lambda,x(i),opt);
        K = funcK(lambda,x(i)-e1);
        y(i,1)= L0 + mul*K;
    end
plot(x',y);

return
end
%-----
function L0 = funcL0(lambda,x,opt)
    switch (opt)
        case 1 % ngam tu do
            alpha0 = 1; beta0 = 0;
        case 2 % Ngam - Ngam
            alpha0 = 1; beta0 = 0;
        case 3 % Tu do - tu do
            alpha0 = 0; beta0 = 1;
        otherwise
    end
    L0= alpha0*sin(lambda*x)-lambda*beta0*cos(lambda*x);
return
end
%-----
function L0p = funcL0p(lambda,x,opt)
    switch (opt)
        case 1 % ngam tu do
            alpha0 = 1; beta0 = 0;
        case 2 % Ngam - Ngam
            alpha0 = 1; beta0 = 0;
        case 3 % Tu do - tu do
            alpha0 = 0; beta0 = 1;
        otherwise

```

```

end
L0p= alpha0*lambdacos(lambda*x)+lambda^2*beta0*sin(lambda*x);
return
end
%-----
% Dinh nghia ham vet nut D(lambda)
function d = funcd0(lambda,par,opt)

L = par(1); h = par(2); nu = par(3); ah = par(4); e1 = par(5);

gama = func_Ic(nu, h,L, ah);
switch(opt)
case 1 % ngam tu do
alpha0 = 1; alpha1 = 0;
beta0 = 0; beta1 = 1;
case 2 % Ngam - Ngam
alpha0 = 1; alpha1 = 1;
beta0 = 0; beta1 = 0;
case 3 % Tu do - tu do
alpha0 = 0; alpha1 = 0;
beta0 = 1; beta1 = 1;
otherwise
end

d0 = (alpha0*alpha1+lambda^2*beta0*beta1)*sin(lambda)+...
lambda*(alpha0*beta1-alpha1*beta0)*cos(lambda);

d1 = (alpha0*cos(lambda*e1)+lambda*beta0*sin(lambda*e1))*...
(alpha1*cos(lambda*(1-e1))-lambda*beta1*sin(lambda*(1-e1)));
d = d0 + lambda*gama*d1;
return
end
%-----
% mo dun tim nghiem bang phuong phap chia doi khoang cach
function x = rtbis(x1,x2,par,opt)
% Copr. 1986-92 Numerical Recipes Software .
jmax = 50; xacc = eps;
f = funcd0(x1,par,opt);
fmid = funcd0(x2,par,opt);
if f*fmid>=0
disp('Root must be bracked for bisection in rtbis');
x = x2 + db;
return;
end
if f < 0
x = x1;
dx = x2-x1;
else
x = x2;
dx = x1-x2;
end

for j =1:jmax
dx = dx*0.5;
xmid = x + dx;

fmid = funcd0(xmid,par,opt);
if fmid <=0
x = xmid;
end

if (abs(dx)<xacc || abs(fmid)==0.0)

```

```

%             disp('too many bisections in rtbis');
%             break;
%         end
%     end

return
end
%-----
function Ic = func_Ic(nu, h,L, ah)
% Vet nut hai canh R. Ruotolo (2004)
% alpha = 0.7314*ah^8-1.0368*ah^7+0.5803*ah^6+1.2055*ah^5-1.0368*ah^4+...
%         0.2381*ah^3+0.9852*ah^2;
% Ic = 2*h*(1-nu^2)*alpha;
alpha = 0.6272*ah^2 - 0.17248*ah^3 + 5.92134*ah^4 - 10.7054*ah^5 + ...
        31.5685*ah^6 - 67.47*ah^7+139.123*ah^8-146.682*ah^9+92.3552*ah^10;
Ic = 2*pi*h*(1-nu^2)*alpha/L;
end
%-----
function K = funcK(lambda,x)
    if x>=0
        K = cos(lambda*x);
    else
        K=0;
    end
return
end
%-----

function K = funcKp(lambda,x)
    if x>=0
        K= -lambda*sin(lambda*x);
    else
        K=0;
    end
return
end
%-----

function h = func_h(x,lambda)
    h = (1/lambda)*sin(lambda*x);
return
end
%-----

function hp = func_hp(x,lambda)
    hp = cos(lambda*x);
return
end
%-----

```